ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
&
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Γ΄ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Π Ρ Ο Λ Ο Γ Ο Σ

Φίλοι μαθητές και μαθήτριες,

Γνωρίζουμε, κατανοούμε και εκτιμούμε τις έντονες προσπάθειες που καταβάλλετε για την πνευματική σας ανάπτυξη και την επαγγελματική σας αποκατάσταση σε επαγγέλματα υψηλής επιστημονικής στάθμης και μεγάλων απαιτήσεων. Η επίτευξη αυτών των στόχων όμως, εξαρτάται από την επιτυχία σας στις εξετάσεις. Σε αυτό ακριβώς το σημείο φιλοδοξούμε να σας βοηθήσουμε με την καινούργια σειρά των βιβλίων μας.

Πάνω στην ύλη που καθορίστηκε από το Υπουργείο Παιδείας και στο «νέο τρόπο» εξέτασης εργαστήκαμε και καταθέτουμε την πρότασή μας.

Πιστεύουμε ότι το βιβλίο που κρατάτε στα χέρια σας, θα σας βοηθήσει να εμπεδώσετε την ύλη με ένα μοναδικό, στη μέθοδό του τρόπο, που ***«κινεί»*** *τη σκέψη και* ***«οδηγεί»*** *στην έρευνα των θεμάτων που είναι υποψήφια για τις εξετάσεις σας.*

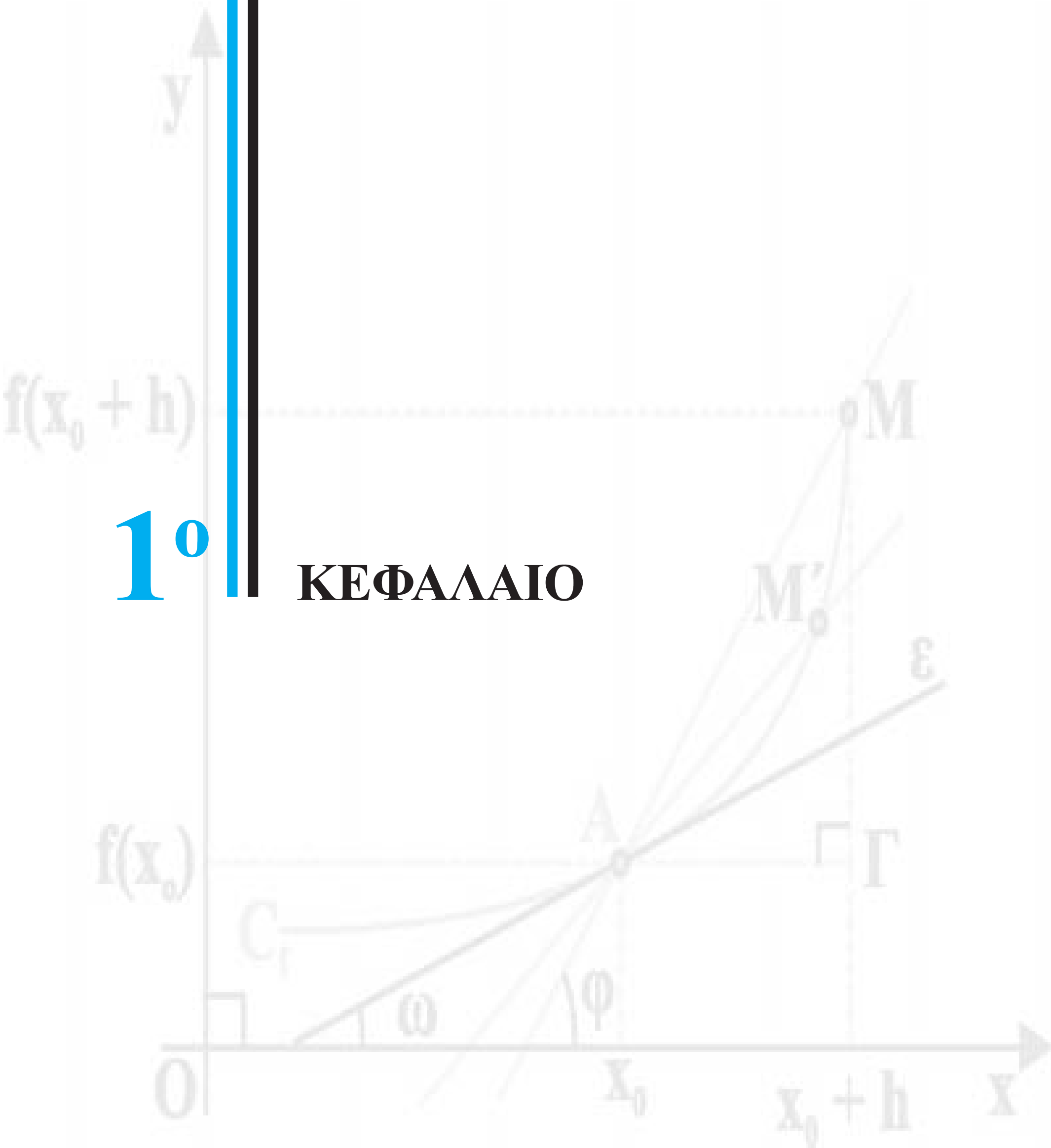
Οι συγγραφείς

Π Ε Ρ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Α

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ



1.1 Συναρτήσεις

Απαραίτητες γνώσεις Θεωρίας

Θεωρία 1.

α) Τι είναι συνάρτηση;
β) Πώς βρίσκουμε την αντίστοιχη τιμή μιας μεταβλητής x;
γ) Τι ονομάζουμε γραφική παράσταση μιας συνάρτησης;
δ) Πως καταλαβαίνουμε από τη μορφή μιας καμπύλης αν είναι γράφική παράσταση συνάρτησης;

Απάντηση:

α) Συνάρτηση είναι η απεικόνιση **κάθε** στοιχείου ενός συνόλου A σε **μοναδικό** στοιχείο ενός συνόλου B και συμβολίζεται με ένα μικρό γράμμα του λατινικού αλφάβητου, συνήθως το f.
Τα στοιχεία του A ονομάζονται **ανεξάρτητες μεταβλητές ή πρότυπα**, συμβολίζονται με x και το σύνολο A ονομάζεται **πεδίο ορισμού**.
Τα στοιχεία του B ονομάζονται **εξαρτημένες μεταβλητές** ή **τιμές** ή **εικόνες**, συμβολίζονται με f(x) ή y και το σύνολο B ονομάζεται **σύνολο τιμών**.
Η απεικόνιση αυτή πραγματοποιείται μέσω ενός αλγεβρικού τύπου που συνδέει τα στοιχεία του A με τα στοιχεία του B και ονομάζεται **τύπος της συνάρτησης** Π.χ. $\mathbf{f(x) = 3x^2}$.

β) Για να βρούμε την αντίστοιχη τιμή μιας μεταβλητής $x = x_0$ αντικαθιστούμε στον τύπο της συνάρτησης το x με x_0 και υπολογίζουμε.

Παράδειγμα: **Εστω $f(x) = 2x^2 - 1$. Τότε για $x = 3$ έχουμε $f(3) = 2 \cdot 3^2 - 1 = 17$**

γ) Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f : A \to R$, ονομάζεται η καμπύλη που σχηματίζεται από τα σημεία (x,f(x)) σε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων και συμβολίζεται με C_f.
Αρα:
- Οι συντεταγμένες κάθε σημείου της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης επαληθεύουν τον τύπο της.

Παράδειγμα:
Το σημείο Α(1,4) ανήκει στη γράφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο:
$f(x) = 2x^2 + 2$, διότι: $4 = 2 \cdot 1^2 + 2$.

- Τα σημεία τομής του γραφήματος μιας συνάρτησης f με τον άξονα xx΄ αν υπάρχουν είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$.

Παράδειγμα:
Να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με $f(x) = x^2 - 1$ με τον άξονα xx΄.

Λύση:
Εχουμε $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -1$

- Το σημείο τομής της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f με τον άξονα yy' αν υπάρχει είναι το (0, f(0)).

Το σημείο αυτό είναι μοναδικό αφού το 0 έχει μοναδική εικόνα.

- Τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων δυο συναρτήσεων f,g αν υπάρχουν είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = g(x)$.

δ) Η γραφική παράσταση κάθε συνάρτησης δεν μπορεί να έχει περισσότερα από ένα κοινά σημεία με οποιαδήποτε ευθεία παράλληλη στον άξονα yy΄.

Θεωρία 2.

α) Τι απαιτείται ώστε μια συνάρτηση να ορίζεται πλήρως;
β) Πως βρίσκουμε το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f;

Απάντηση:
α) Για να ορίσουμε μια συνάρτηση f χρειαζόμαστε: **ι)** τον τύπο f(x) και
ιι) το πεδίο ορισμού της.

β) Όταν η f έχει ένα αλγεβρικό τύπο το πεδίο ορισμού θα είναι το ευρύτερο υποσύνολο του R στο οποίο ο τύπος της f έχει νόημα πραγματικού αριθμού. Προφανώς αν η συνάρτηση είναι πολυωνυμική το πεδίο ορισμού είναι το R. Ετσι:
Για να βρούμε το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f συναληθεύουμε τους περιορισμούς που επιβάλλει η απαίτηση $f(x) \in R$. Ετσι:

- **Παρονομαστές απαιτούνται διάφοροι του μηδενός.**

Παράδειγμα:
Για $f(x) = \dfrac{1}{x-4}$ πρέπει $x \neq 4$, άρα έχω: A = R-{4}

- **Υπόριζες ποσότητες απαιτούνται μη αρνητικές.**

Παράδειγμα:

Για $f(x)=\sqrt{x-2}$ πρέπει $x \geq 2$ άρα έχω $A=[2,+\infty)$.

- **Ποσότητες "σε λογάριθμο" απαιτούνται θετικές.**

Παράδειγμα:

Για $f(x)=\log(10-x)$ πρέπει $x<10$ άρα έχω $A=(-\infty,10)$

- **Επίσης:**
  - ι) **βάσεις λογαρίθμων απαιτούνται θετικές και διάφορες της μονάδας.**
  - ιι) **ποσότητες σε εφαπτομένη απαιτούνται διάφορες του $\kappa\pi+\pi/2$, $\kappa\in\mathbb{Z}$**
  - ιιι) **ποσότητες σε συνεφαπτομένη απαιτούνται διάφορες του $\kappa\pi$, $\kappa\in\mathbb{Z}$**

- **Σε συνδυασμό των παραπάνω περιπτώσεων όλοι οι περιορισμοί λαμβάνονται υπ΄οψη:**

Παράδειγμα:

Για $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{x-4}+\log(10-x)$ πρέπει $x\neq 4$, $x<10$ και $x\geq 2$ άρα έχω:

$$A=[2,4)\cup(4,10)$$

Θεωρία 3.

α) Πότε δυο συναρτήσεις είναι ίσες;
β) Ποιες πράξεις μπορούμε να κάνουμε μεταξύ συναρτήσεων;
γ) Τι είναι σύνθετη συνάρτηση και πως βρίσκουμε τον τύπο της;

Απάντηση:

α) Δυο συναρτήσεις f, g είναι ίσες όταν:
- Έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού $A_f=A_g$
- Έχουν τον ίδιο τύπο $f(x)=g(x)$.

β) Μεταξύ δυο συναρτήσεων f με πεδίο ορισμού A_f και g με πεδίο ορισμού A_g ορίζονται οι παρακάτω πράξεις μόνο αν $A=A_f\cap A_g\neq\varnothing$

1. Αθροισμα	$S=f+g$	με	$S(x)=f(x)+g(x)$	$x\in A$.
2. Διαφορά	$D=f-g$	με	$D(x)=f(x)-g(x)$	$x\in A$.
3. Γινόμενο	$P=f\,g$	με	$P(x)=f(x)g(x)$	$x\in A$.
4. Πηλίκο	$R=f/g$	με	$R(x)=f(x)/g(x)$	$x\in A$, $g(x)\neq 0$.

Το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης που προκύπτει είναι το $A_f \cap A_g$ εκτός από τη συνάρτηση $R(x) = f(x)/g(x)$ όπου $A \subseteq A_f \cap A_g$

Παρατήρηση:
Από την (3) μπορούμε να ορίσουμε την συνάρτηση $[f(x)]^2 = f(x)f(x)$ $x \in A$ και κατ΄επέκταση την $[f(x)]^\nu$ $x \in A, \nu \in N$ με $\nu \geq 3$ ώς $[f(x)]^\nu = [f(x)]^{\nu-1} f(x)$

γ) Εστω οι συναρτήσεις f, g με τύπους $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = x^2 + 1$. Αν θέσουμε στον τύπο της f όπου x την παράσταση x^2+1 θα προκύψει η συνάρτηση h με τύπο: $h(x) = f(g(x)) = \eta\mu(x^2 + 1)$. Η συνάρτηση h ονομάζεται **σύνθεση της g με την f.** Όμοια ορίζονται οι συναρτήσεις g(f(x)), f(f(x)), g(g(x)) υπό κατάλληλες προϋποθέσεις.

Θεωρία 4.

α) Τι ονομάζουμε όριο συνάρτησης;
β) Ποιες είναι οι ιδιότητες του ορίου μιας συνάρτησης;
γ) Τι ονομάζουμε συνεχή συνάρτηση στο x_0;
δ) Πως υπολογίζεται το όριο μιας συνάρτησης;
ε) Τι είναι απροσδιόριστη μορφή;

Απάντηση:

α) Όριο μιας συνάρτησης $f : A \to R$, ονομάζεται ένας πραγματικός αριθμός k τον οποίο προσεγγίζει η f(x) καθώς το x προσεγγίζει μια συγκεκριμένη τιμή x_0.

Συμβολίζουμε $\lim_{x \to x_0} f(x) = k$

Παρατήρηση 1:
Το x_0 δεν ανήκει απαραίτητα στο πεδίο ορισμού Α, αλλά είναι απαραίτητο να μπορεί να προσεγγιστεί από στοιχεία του Α.

Παρατήρηση 2:
Το $\lim_{x \to x_0} f(x) = k$ δεν είναι πάντα πραγματικός αριθμός ούτε υπάρχει πάντα. Οι περιπτώσεις αυτές ξεφεύγουν όμως από το διδακτικό σκοπό της ενότητας αυτής και δεν θα αποτελέσουν αντικείμενο μελέτης

.

β) Εστω $\lim_{x \to x_0} f(x) = k_1$ και $\lim_{x \to x_0} g(x) = k_2$. Τότε οι ιδιότητες των ορίων είναι οι εξης:

i) $\lim_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x) = k_1 \pm k_2$

ii) $\lim_{x \to x_0} [\alpha f(x)] = \alpha \lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha k_1, \alpha \in R$ **iii)** $\lim_{x \to x_0} [f(x)g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \lim_{x \to x_0} g(x) = k_1 k_2$

iv) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=\dfrac{k_1}{k_2}$ $g(x_0)\neq 0,\ k_2\neq 0$ **v)** $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[\nu]{f(x)}=\sqrt[\nu]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}=\sqrt[\nu]{k_1}$, $f(x)\geq 0$

γ) Συνεχής στο $x_0\in A$ ονομάζεται μια συνάρτηση $f:A\to R$ όταν ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

Μια συνάρτηση $f:A\to R$ που είναι συνεχής για κάθε $x\in A$ ονομάζεται **συνεχής συνάρτηση.** Αποδεικνύεται ότι οι πολυωνυμικές, οι τριγωνομετρικές, οι εκθετικές, οι λογαριθμικές και όλες οι συναρτήσεις που προκύπτουν από πράξεις μεταξύ αυτών είναι συνεχείς συναρτήσεις.

δ) Για να βρούμε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ μιας συνεχούς συνάρτησης αντικαθιστούμε στον τύπο της f όπου x το x_0.

Παράδειγμα:

Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-1)$

Λύση:

Εχουμε $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-1)=2^2-1=3$

ε) Σε ρητές συναρτήσεις είναι δυνατόν εφαρμόζοντας τα παραπάνω να οδηγηθούμε στην μορφή 0/0. Η περίπτωση αυτή ονομάζεται **απροσδιόριστη μορφή** και για την εύρεση του ορίου απαιτείται μια διαδικασία που λέγεται **άρση της απροσδιοριστίας.**
Η άρση απροσδιοριστίας γίνεται ως εξής:

- Παραγοντοποιούμε τους όρους του κλάσματος και κάνουμε απλοποιήσεις.

Παράδειγμα:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x-2)=-1$$

- Οταν η μεταβλητή βρίσκεται κάτω από ρίζα πολλαπλασιάζουμε τους όρους του κλάσματος με τη συζυγή παράσταση.

Παράδειγμα:

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{5}\right)}{(x-5)\left(\sqrt{x}+\sqrt{5}\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{(x-5)\left(\sqrt{x}+\sqrt{5}\right)}==\lim_{x\to 5}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{5}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{5}}=\frac{1}{2\sqrt{5}}$$

Σημείωση:
Υπάρχουν και άλλες περιπτώσεις απροσδιόριστων μορφών οι οποίες όμως ξεφεύγουν από το διδακτικό σκοπό της παραγράφου αυτής.

Θεωρία 4.

Τι κάνουμε όταν μας ζητούν να εκφράσουμε ένα μέγεθος ως συνάρτηση μιας μεταβλητής; (Προβλήματα κατασκευής συνάρτησης.)

Απάντηση:
Μας ζητούν να εκφράσουμε ένα μέγεθος συναρτήσει μιας μεταβλητής έστω x, κάνουμε τα εξής:

1. Βρίσκουμε μια σχέση από γνωστή θεωρία (Ευκλείδια Γεωμετρία, Στερεομετρία, Τριγωνομετρία κ.λ.π.) που εκφράζει το μέγεθος που ζητώ.

2. Απαλοίφουμε κάθε άλλη μεταβλητή που εμφανίζεται εκτός της ζητούμενης. Αυτό γίνεται ως εξής: Επιλύουμε μια δεύτερη σχέση ως προς τη μεταβλητή που θέλουμε να απαλοίψουμε και αντικαθιστούμε στην πρώτη.

3. Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού για τη μεταβλητή x, που εμπεριέχει και περιορισμούς του ίδιου του προβλήματος.

Παράδειγμα:
Να εκφράσετε το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με περίμετρο ίση με 30cm συναρτήσει μιας πλευράς του.

Λύση:

Βήμα 1.
Το εμβαδό του ορθογωνίου δίνεται από τον τύπο $E = \alpha\,\beta$ όπου α,β είναι οι πλευρές του.

Βήμα 2.
Πρέπει να εκφράσουμε το α συναρτήσει του β. Από την εκφώνηση έχουμε ότι:

$$2\alpha + 2\beta = 30 \Leftrightarrow \alpha = \frac{30-2\beta}{2} \text{ Άρα: } E(\beta) = \frac{30-2\beta}{2}\beta$$

Βήμα 3.

Τέλος για το πεδίο ορισμού έχουμε $\beta > 0$ και $\alpha > 0 \Leftrightarrow \dfrac{30-2\beta}{2} > 0 \Leftrightarrow 15 > \beta$

Άρα $0 < \beta < 15.$

Λυμένες Ασκήσεις.

1. Εστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 + (k-1)x - 6$, $k \in R$. Να βρεθεί ο k ώστε:

α) η συνάρτηση g με $g(x) = \sqrt{f(x)}$ να έχει πεδίο ορισμού το $A = (-\infty, -1] \cup [6, +\infty)$.

β) Υπάρχουν τιμές του k ώστε η g να έχει πεδίο ορισμού το R;

Λύση:

α) Πρέπει $f(x) \geq 0$ στο $(-\infty, -1] \cup [6, +\infty)$. Αρα η εξίσωση $x^2 + (k-1)x - 6 = 0$ πρέπει να έχει ρίζες τίς $x_1 = -1$ και $x_2 = 6$.

Αρα: $x^2 + (k-1)x - 6 = (x+1)(x-6) \Leftrightarrow x^2 + (k-1)x - 6 = x^2 - 5x - 6$

$\Leftrightarrow k - 1 = -5$

$\Leftrightarrow k = -4$

β) Πρέπει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in R$ δηλαδή: $x^2 + (k-1)x - 6 \geq 0$ για κάθε $x \in R$.

Άρα: $(k-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) \leq 0 \Leftrightarrow k^2 - 2k + 1 + 24 \leq 0$

$\Leftrightarrow k^2 - 2k + 25 \leq 0$

Το τελευταίο τριώνυμο έχει: $\Delta = -96 < 0$, άρα: $k^2 - 2\kappa + 25 > 0$, για κάθε $k \in R$.

Αρα δεν υπάρχουν τιμές του $k \in R$ ώστε η g να έχει πεδίο ορισμού το R.

2. Εστω η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & , x \leq \alpha \\ \alpha x + \beta & , x > 3 \end{cases}$

α) Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in R$ ώστε η f να ορίζεται στο R και η γραφική της παράσταση να διέρχεται από το σημείο A(4,4).

β) Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η f είναι αρνητική.

γ) Να βρεθούν τα σημεία τομής του της γραφ. παράστασης της f με την ευθεία y = 1.

δ) Να γίνει η γραφική παράσταση της f.

Λύση:

α) $A_f = R$ σημαίνει ότι: $\left.\begin{matrix}(-\infty, \alpha] \cup (3, +\infty) = R \\ (-\infty, \alpha] \cap (3, +\infty) = \varnothing\end{matrix}\right\}$ άρα: $(-\infty, \alpha] = (-\infty, 3]$ δηλαδή $\alpha = 3$.

Επίσης: $(4,4) \in C_f$ σημαίνει ότι: $f(4) = 4 \Leftrightarrow 3 \cdot 4 + \beta = 4 \Leftrightarrow \beta = -8$

Αρα: $f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & , x \leq 3 \\ 3x - 8 & , x > 3 \end{cases}$

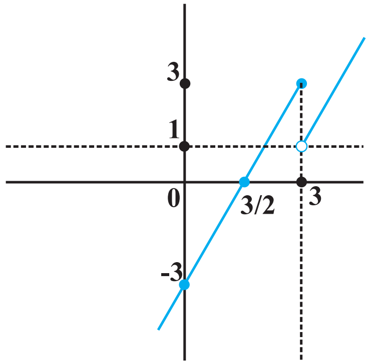
β) Για $x \leq 3$ έχουμε: $f(x) < 0 \Leftrightarrow 2x - 3 < 0 \Leftrightarrow x < 3/2$

Για $x > 3$ έχουμε: $f(x) < 0 \Leftrightarrow 3x - 8 < 0 \Leftrightarrow x < 8/3$

Αρα τελικά: $f(x) < 0$, στο $(-\infty, 3/2)$

γ) Για $x \le 3$ έχουμε: $f(x) = 1 \Leftrightarrow 2x - 3 = 1 \Leftrightarrow x = 2$
Για $x > 3$ έχουμε: $f(x) = 1 \Leftrightarrow 3x - 8 = 1 \Leftrightarrow x = 3$
Άρα η C_f τέμνει την ευθεία: $y = 1$ σε μοναδικό σημείο $\Sigma(2,1)$

δ) Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο διπλανό σχήμα:



3. Αν για μια συνάρτηση f ισχύει: f(x) + 3f(1/x) = 2x – 1, για κάθε x R* η οποία θα ισχύει και για 1/x, να βρεθεί ο τύπος της.

Λύση:

Έχουμε: $f(x) + 3f(1/x) = 2x - 1$ **(1)**
Οπότε: $f(1/x) + 3f(x) = 2/x - 1 \Leftrightarrow -3f(1/x) - 9f(x) = -6/x + 3$ **(2)**
Προσθέτουμε κατά μέλη τις **(1)** και (2) και παίρνουμε:

$$f(x) + 3f(1/x) - 3f(1/x) - 9f(x) = 2x - 1 - \frac{6}{x} + 3 \Leftrightarrow -8f(x) = 2x - \frac{6}{x} + 2$$

$$\Leftrightarrow -8f(x) = \frac{2x^2 + 2x - 6}{x} \Leftrightarrow f(x) = \frac{-x^2 - x + 3}{4x}, \ x \in R^*$$

4. Να υπολογιστούν τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{2x^2 - 8}{x - 2}$ **β)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x + \alpha^2} - \alpha}{x}, \ \alpha > 0$ **γ)** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} (\eta\mu 2x + \sigma\upsilon\nu x)$

Λύση:

α) $$\lim_{x\to 2} \frac{2x^2 - 8}{x - 2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 2} \frac{2(x^2 - 4)}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{2(x-2)(x+2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2} 2(x+2) = 2(2+2) = 8$$

β) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x + \alpha^2} - \alpha}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x + \alpha^2} - \alpha)(\sqrt{x + \alpha^2} + \alpha)}{x(\sqrt{x + \alpha^2} + \alpha)} = \lim_{x\to 0} \frac{x + \alpha^2 - \alpha^2}{x(\sqrt{x + \alpha^2} + \alpha)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \alpha^2} + \alpha} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2} + \alpha} = \frac{1}{2\alpha}$$

γ) $$\lim_{x\to \frac{\pi}{6}} (\eta\mu 2x + \sigma\upsilon\nu x) = \eta\mu\left(2\frac{\pi}{6}\right) + \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} = \eta\mu\frac{\pi}{3} + \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

5. Εστω οι συναρτήσεις f,g με τύπους: $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$ και $g(x) = 3x + 6$

α) Να βρεθούν τα όρια: $\lim_{x\to 1} f(x)$ και $\lim_{x\to 1} g(x)$.

β) Να βρεθούν τα όρια: $\lim_{x\to 1} f(x)g(x)$ και $\lim_{x\to 1}\left[(f(x)+2)\sqrt{g(x)}\right]$.

γ) Αν $\lim_{x\to 2}(h(x)+2x-1)=7$, να βρεθεί το $\lim_{x\to 2} h(x)$.

Λύση:

α) $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(3x^2-5x+1) = 3-5+1=-1$, $\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1}(3x+6) = 3+6=9$

β) $\lim_{x\to 1} f(x)g(x) = \lim_{x\to 1} f(x)\lim_{x\to 1} g(x) = -1\cdot 9 = -9$

$$\lim_{x\to 1}[(f(x)+2)\sqrt{g(x)} = (\lim_{x\to 1} f(x)+2)\sqrt{\lim_{x\to 1} g(x)} = (-1+2)\sqrt{9} = 3$$

γ) Θέτουμε: $w(x) = h(x) + 2x + 1$, τότε: $\lim_{x\to 2} w(x) = 7$ για x "κοντά" στο x = 2.

Εχουμε: $w(x) = h(x)+2x-1 \Leftrightarrow h(x) = w(x)-2x+1$

Αρα: $\lim_{x\to 2} h(x) = \lim_{x\to 2}(w(x)-2x+1) = \lim_{x\to 2} w(x) + \lim_{x\to 2}(-2x+1) = 7-4+1=4$

6. Εστω η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-\alpha x+\beta}{x-3}, & x\neq 3 \\ 5\ , & x=3 \end{cases}$. Να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in R$ ώστε το γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο Σ(1, 3) και η f να είναι συνεχής στο R.

Λύση:

Η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο Σ(1,3) σημαίνει ότι:

$$f(1) = 3 \Leftrightarrow \frac{1^2-\alpha\cdot 1+\beta}{1-3} = 3 \Leftrightarrow -\alpha+\beta=-7 \quad \textbf{(1)}$$

Η f είναι συνεχής στο R σημαίνει ότι η f είναι συνεχής στο: $x_0 = 3$ άρα:

$$\lim_{x\to 3} f(x) = f(3) \Leftrightarrow \lim_{x\to 3}\frac{x^2-\alpha x+\beta}{x-3} = 5 \text{ και } \lim_{x\to 3}(x-3) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 3}\frac{x^2-\alpha x+\beta}{x-3}\cdot(x-3) = 1\cdot 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 3}(x^2-\alpha x+\beta) = 0 \Leftrightarrow 9-3\alpha+\beta = 0 \Leftrightarrow 3\alpha - \beta = 9 \quad \textbf{(2)}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις **(1)** και **(2)** και έχουμε:

$3\alpha - \beta - \alpha + \beta = 9 - 7 \Leftrightarrow 2\alpha = 2 \Leftrightarrow \alpha = 1$. Αρα από: **(1)** $\Leftrightarrow$ $-1 + \beta = 7 \Leftrightarrow \beta = -6$

7. Τα κέρδη (σε δεκάδες χιλιάδες €) μιας επιχείρησης από την πώληση ενός προϊόντος δίνονται από τη συνεχή συνάρτηση $P(t)=\dfrac{t^2-13t+12}{t-12}$ όπου $t\in[1,11]$ ο χρόνος σε μήνες.

α) Ποιο μήνα τα κέρδη ήταν 50.000 €;

β) Πόσα ήταν τα κέρδη το μήνα Μάρτιο;

γ) Το Δεκέμβριο η επιχείρηση σταμάτησε την πώληση του προϊόντος. Πόσα χρήματα θα κέρδιζε, αν συνέχιζε την πώληση;

Λύση:

α) $P(t)=5\Leftrightarrow \dfrac{t^2-13t+12}{t-12}=5\Leftrightarrow t^2-13t+12=5t-60\Leftrightarrow t^2-18t+72=0$

$\Delta=324-4\cdot 72=36>0$

$$t_{1,2}=\frac{18\pm\sqrt{36}}{2}=\begin{cases} t_1=12 & (\text{Απορ.})\\ t_2=6 & (\text{Ιούνιος})\end{cases}$$

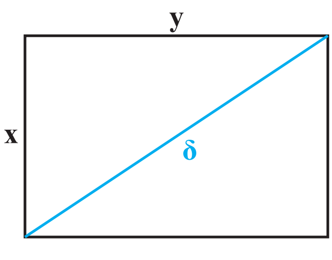
β) $P(3)=\dfrac{3^2-13\cdot 3+12}{3-12}=\dfrac{9-39+12}{-9}=2$. Άρα έχουμε κέρδη 20.000 €;

γ) Επειδή P συνεχής έχουμε:

$$P(12)=\lim_{t\to 12}P(t)=\lim_{t\to 12}\frac{t^2-13t+12}{t-12}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{t\to 12}\frac{(t-1)(t-12)}{t-12}=\lim_{t\to 12}(t-1)=11$$

Αρα η επιχείρηση έχασε 110.000 €.

8. Να εκφράσετε το εμβαδό ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου σαν συνάρτηση της διαγωνίου του αν το άθροισμα των διαστάσεων του είναι ίσο με 10cm.



Λύση:

Εστω x, y οι άνισες πλευρές και δ η διαγώνιος.

Τότε: $x^2+y^2=\delta^2\Leftrightarrow x^2+y^2+2xy=\delta^2+2xy\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+y)^2=\delta^2+2E\Leftrightarrow 100=\delta^2+2E\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow E=50-\delta^2/2,\ \ 0<\delta<\sqrt{10}$

9. **Ένα κυλινδρικό δοχείο έχει ύψος h διπλάσιο της ακτίνας της βάσης r.**
α) Να εκφράσετε τον όγκο του σαν συνάρτηση της διαμέτρου της βάσης.
β) Να βρεθεί ο όγκος αν η διάμετρος είναι 10cm.

Λύση:

α) Ο όγκος του κυλίνδρου είναι $V = \pi r^2 h$. Από υπόθεση έχουμε: $h = 2r = \delta$ και $r = \delta/2$.

Άρα: $V(\delta) = \pi\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 \delta \Leftrightarrow V(\delta) = \frac{\pi\delta^3}{4}, \quad \delta > 0$

β) $V(10) = \frac{\pi(10cm)^3}{4} = 250\pi \ cm^3$

10. **Να βρεθεί το $\alpha \in R$ ώστε: $\lim\limits_{x\to 1}(\alpha x^2 - 5x + 10) = \lim\limits_{x\to \alpha}(x^2 - 1)$**

Λύση:

$\lim\limits_{x\to 1}(\alpha x^2 - 5x + 10) = \lim\limits_{x\to \alpha}(x^2 - 1) \Leftrightarrow \alpha - 5 + 10 = \alpha^2 - 1 \Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha - 6 = 0$ είναι

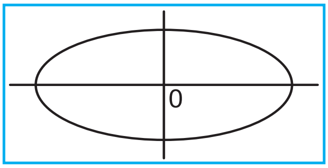
$\Delta = (-1)^2 - 4(-6)1 = 25 > 0$, οπότε $\alpha_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2}$ άρα $\alpha_1 = 3$ ή $\alpha_2 = -2$

Ερωτήσεις Σωστό – Λάθος

Σημείωση:
Ολες οι συναρτήσεις είναι πραγματικές συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένα υποσύνολο του R.

Να χαρακτηρίσετε σαν σωστές (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις και να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας. Στις περιπτώσεις λανθασμένων προτάσεων να αναφέρετε ποιό είναι το λάθος και να τις διορθώσετε.

1. Η διαδικασία, με την οποία κάθε στοιχείο ενός συνόλου Α αντιστοιχίζεται σ' ένα ακριβώς στοιχείο ενός άλλου συνόλου Β είναι συνάρτηση.
2. Η σχέση $x^2 + y^2 = 1$ όπου $x, y \in R$, είναι συνάρτηση.
3. Η σχέση g με τύπο $g(x) = x^2 + x - 1$ είναι συνάρτηση.
4. Η σχέση h με τύπο $h(x) = \pm\sqrt{t}$, $t \in R^+$, είναι συνάρτηση.
5. Η σχέση f με τύπο $f(x) = -\sqrt{t}$, $t \in R^+$, είναι συνάρτηση.
6. Η σχέση f με τύπο $f(x) = |x|$, είναι συνάρτηση.
7. Το διπλανό σχήμα παριστάνει γραφική παράσταση συνάρτησης.



8. Η σχέση f, με τύπο $f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ ρητός} \\ 1, & x \text{ άρρητος} \end{cases}$ είναι συνάρτηση.
9. Η σχέση f, με τύπο $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1, & x \geq 1 \\ 5x - 6, & x < 2 \end{cases}$ είναι συνάρτηση.
10. Η σχέση f, με τύπο $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x > 2 \\ 5, & x < 2 \end{cases}$ είναι συνάρτηση.
11. Η σχέση f, με τύπο $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1, & x \geq 1 \\ 7x - 5, & x \leq 1 \end{cases}$ είναι συνάρτηση.
12. Αν για μια συνάρτηση f, που έχει πεδίο ορισμού το $A \subseteq R$, ισχύει $f(x) = f(y)$ για κάποια $x, y \in A$, τότε $x = y$.
13. Αν ένα σημείο Α ανήκει στην γραφική παράσταση μιας συνάρτησης τότε επαληθεύει τον τύπο της.
14. Οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$ είναι τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα yy΄.

15. Το σημείο Α(2,5) ανήκει στην γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $f(x) = x^2 + 1$.

16. Η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 + 1$ τέμνει τον άξονα xx΄ σε δύο σημεία.

17. Η γραφ. παράσταση μιας συνάρτησης δεν μπορεί να τέμνει δυο φορές τον άξονα xx΄.

18. Το σύνολο τιμών είναι το ελάχιστο υποσύνολο του R στο οποίο ο τύπος της f έχει νόημα.

19. Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις έχουν πεδίο ορισμού το R.

20. Η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ έχει πεδίο ορισμού το R.

21. Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x-1 & ,|x|>4 \\ 5x-6 & ,|x|<2 \end{cases}$ έχει πεδίο ορισμού το (2,4).

22. Οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ και $g(x) = x + 1$ είναι ίσες.

23. Οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x-10}$ και $g(x) = log(1-x)$ μπορούν να προστεθούν.

24. Αν οι συναρτήσεις f,g ορίζονται και οι δύο σ' ένα σύνολο Α, τότε και η συνάρτηση f/g ορίζεται στο ίδιο ακριβώς σύνολο.

25. Η συνάρτηση R = f/g ορίζεται στο R, αν οι συναρτήσεις f, g ορίζονται στο R.

26. Εστω f, g συναρτήσεις με πεδία ορισμού A_f, A_g. Τότε οι συναρτήσεις f + g και f - g έχουν το ίδιο πεδίο ορίσμού.

27. Εστω f, g συναρτήσεις με πεδία ορισμού A_f, A_g Τότε η f/g ορίζεται στο $A_f \cap A_g$.

28. Αν οι συναρτήσεις f,g ορίζονται σ' ένα σύνολο Α, τότε και η συνάρτηση f+g ορίζεται στο ίδιο σύνολο.

29. Η συνάρτηση $f(g(x)) = ημ(x^2 - 1)$ είναι σύνθεση των συναρτήσεων $f(x) = ημx$ και $g(x) = x^2 - 1$.

30. Εστω οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$ και $g(x) = x$. Τότε η $g(f(x)) = f(g(x))$.

31. Το όριο μιας συνάρτησης υπάρχει πάντα.

32. Για να υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ πρέπει οπωσδήποτε το x_0 να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f(x).

33. Ισχύει ότι $\lim\limits_{x \to x_0} kf(x) = k \lim\limits_{x \to x_0} f(x),\ k \in R$

34. Ισχύει ότι: f συνεχής στο $x_0 \in A_f \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

35. Η έννοια της συνέχειας μιας συνάρτησης δεν αναφέρεται μόνο σε σημεία του πεδίου ορισμού της.

36. Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού το A, λέγεται συνεχής, αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του συνόλου A.

37. Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση είναι συνεχής.

38. Οι συναρτήσεις f(x) = ημx και g(x) = συνx είναι συνεχείς.

39. Η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \ln x$, x>0, είναι συνεχής.

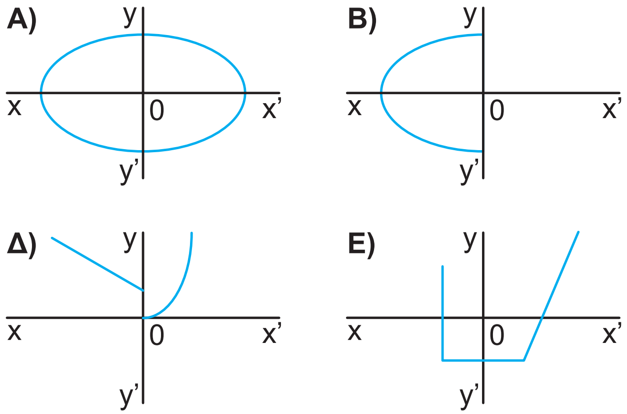
40. Η συνάρτηση $f(x) = e^x ημx$, είναι συνεχής.

41. Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \neq 5 \\ 4 & , x = 5 \end{cases}$ είναι συνεχής.

Ερωτήσεις Πολλαπλής Επιλογής.

Βρείτε την σωστή απάντηση στα παρακάτω δικαιολογώντας την επιλογή σας.

1. **Ποιο από τα παρακάτω διαγράμματα είναι γραφική παράσταση συνάρτησης;**



2. **Εστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x-1}$. Το πεδίο ορισμού της είναι το :**

α) R β) R/{1} γ) $(1,+\infty)$

δ) $[1,+\infty)$ ε) κανένα από τα προηγούμενα

3. **Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x-1 & ,|x|>5 \\ 5x-6 & ,|x|\le 1 \end{cases}$ έχει πεδίο ορισμού:**

α) R β) [1,5) γ) $(-\infty,-5)\cup[-1,1]\cup(5,+\infty)$

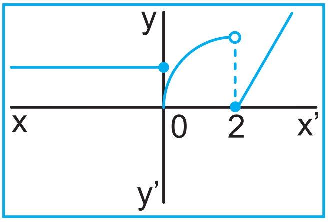
δ) [-1,1] ε) κανένα από τα προηγούμενα

4. **Ποιο από τα παρακάτω σημεία ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο: $f(x) = x^2 - 1$;**

α) (1,0) β) (0,1) γ) (2,-3)

δ) (-1,1) ε) κανένα από τα προηγούμενα

5. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, με γραφική παράσταση που παρουσιάζεται στο διπλανό σχήμα, είναι:



α) R β) R-{0} γ) R-{0,2}
δ) R-{2} ε) κανένα από τα παραπάνω

6. Εστω η συνάρτηση $f(x)=\frac{\sqrt{x-3}}{x-3}$. Το πεδίο ορισμού της είναι το :

α) R β) R-{3} γ) $(3,+\infty)$
δ) $[3,+\infty)$ ε) κανένα από τα προηγούμενα

7. Εστω η συνάρτηση $f(x)=\frac{\sqrt{x-2}}{x-1}$. Το πεδίο ορισμού της είναι το:

α) R/{1} β) R/{-2, +2} γ) $(2,+\infty)$
δ) $[2,+\infty)$ ε) κανένα από τα προηγούμενα

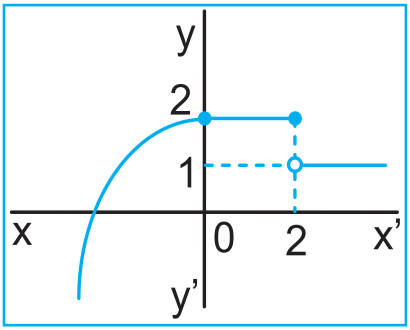
8. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{e^x-1}$ είναι:

α) R β) R-{0} γ) $[0,+\infty)$ δ) $(-\infty,0]$ ε) $(0,+\infty,)$

9. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ είναι:

α) $[-1,1]$ β) $[-1,\infty)$ γ) $(-1,1)$ δ) $(-\infty,1]$ ε) R

10. Το διπλανό διάγραμμα είναι γραφική παράσταση της συνάρτησης:



α) $f(x)=\begin{cases} x^2 & αν\ x<0 \\ 2 & αν\ 0<x<2 \\ 1 & αν\ x>0 \end{cases}$

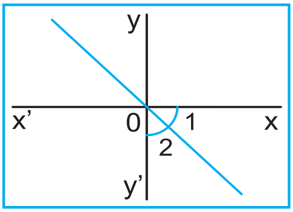
β) $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & αν\ x<0 \\ 2 & αν\ 0\le x\le 2 \\ 1 & αν\ x>2 \end{cases}$

γ) $f(x)=\begin{cases} 2-x^2 & αν\ x<0 \\ 2 & αν\ 0<x<2 \\ 1 & αν\ x>2 \end{cases}$

δ) $f(x)=\begin{cases} 2-x^2 & \text{αν } x \le 0 \\ 2 & \text{αν } 0 < x \le 2 \\ 1 & \text{αν } x > 2 \end{cases}$ ε) κανένα από τα παραπάνω

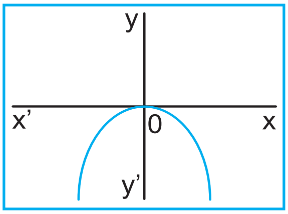
11. Το διάγραμμα που παρουσιάζεται στο διπλανό σχήμα είναι γραφική παράσταση της συνάρτησης:

α) $f(x) = -x$ β) $f(x) = x$ γ) $f(x) = 1/x$
δ) $f(x) = -1/x$ ε) $f(x) = -2x$



12. Το διάγραμμα που παρουσιάζεται στο διπλανό σχήμα είναι γραφική παράσταση της συνάρτησης

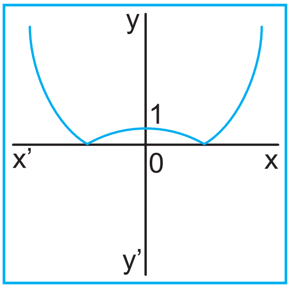
α) $f(x) = x^2$ β) $f(x) = -x^2$ γ) $f(x) = -1/x^2$
δ) $f(x) = 1/x^2$ ε) $f(x) = 1/x$



13. Το διπλανό διάγραμμα είναι γραφική παράσταση της συνάρτησης:

α) $f(x) = x^2 - 1$ β) $f(x) = 1 - x^2$ γ) $f(x)=|x^2-1|$

δ) $f(x)=|x^2+1|$ ε) $f(x) = ημx$



14. Το διπλανό διάγραμμα είναι γραφική παράσταση της συνάρτησης f. Η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει:

α) μια λύση β) δυο λύσεις γ) τρεις λύσεις
δ) τέσσερις λύσεις ε) καμμία λύση

15. Έστω δύο συναρτήσεις f,g που ορίζονται στα A_f, A_g αντίστοιχα και η συνάρτηση $h = f/g$. Το πεδίο ορισμού της h θα είναι το:

α) $A_f \cap A_g$ β) R γ) $A \subseteq A_f \cap A_g$

δ) $A_f \cup A_g$ ε) κανένα από τα προηγούμενα

16. Δύο συναρτήσεις f,g με αντίστοιχα πεδία ορισμού A_f, A_g είναι ίσες όταν :

α) $A_f = A_g$ β) $f(x) = g(x)$ γ) Τα (α) και (β) μαζί
δ) $f(g(x)) = g(f(x))$ ε) κανένα από τα προηγούμενα

17. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = ημx$ και $g(x) = x^2 + 2$. Τότε η $f(g(x))$ είναι :

α) $ημx^2 + 2$ β) $ημ^2x + 2$ γ) $ημ(x^2 + 2)$
δ) $x^2\, ημx + 2ημx$ ε) κανένα από τα προηγούμενα

18. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$ και $g(x) = x^2 + 2$. Τότε η $g(f(x))$ είναι :

α) $\ln x^2 + 2$ β) $\ln^2 x + 2\ln x$ γ) $\ln(x^2 + 2)$

δ) $\ln^2 x + 2$ ε) κανένα από τα προηγούμενα

19. Η συνάρτηση $f : A \to R$ λέγεται συνεχής αν :

α) $\lim_{x\to x_0} f(x) = x_0$ β) $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ γ) $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

δ) $\lim_{x\to x_0} f(x_0) = x_0$ ε) κανένα από τα προηγούμενα

20. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$. Τότε το $\lim_{x\to 3} f(x)$ είναι :

α) 3 β) δεν υπάρχει γ) 6 δ) 0 ε) - 3

21. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x - 2}$. Τότε το $\lim_{x\to 1} f(x)$ είναι:

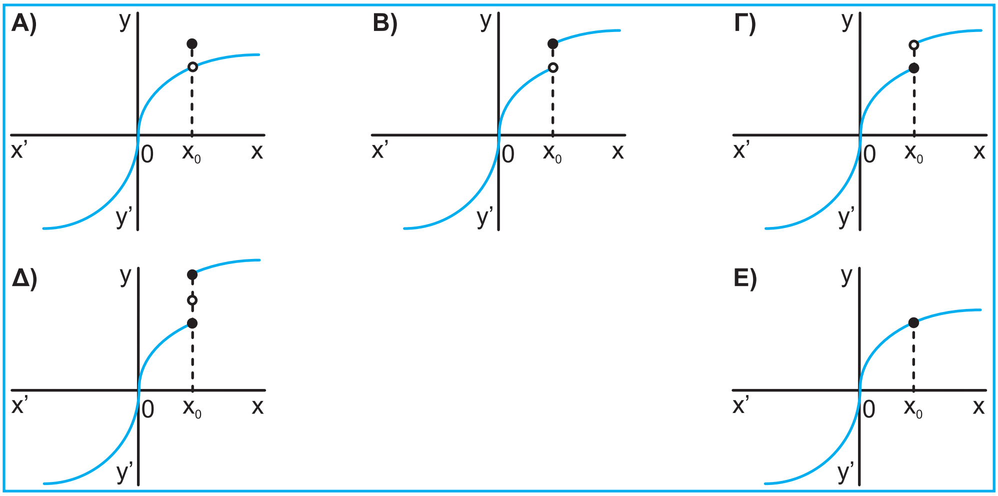
α) 1 β) δεν υπάρχει γ) $\sqrt{-1}$ δ) 0 ε) - 1

22. Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν και μόνο αν:

α) ισχύει $f(x_0) = 0$ β) ισχύει $f(x_0) \neq 0$ γ) υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} f(x)$

δ) ισχύει $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ ε) ισχύει $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

23. Στις παρακάτω πέντε γραφικές παραστάσεις ισάριθμων συναρτήσεων στη θέση x_0 συνεχής είναι η συνάρτηση

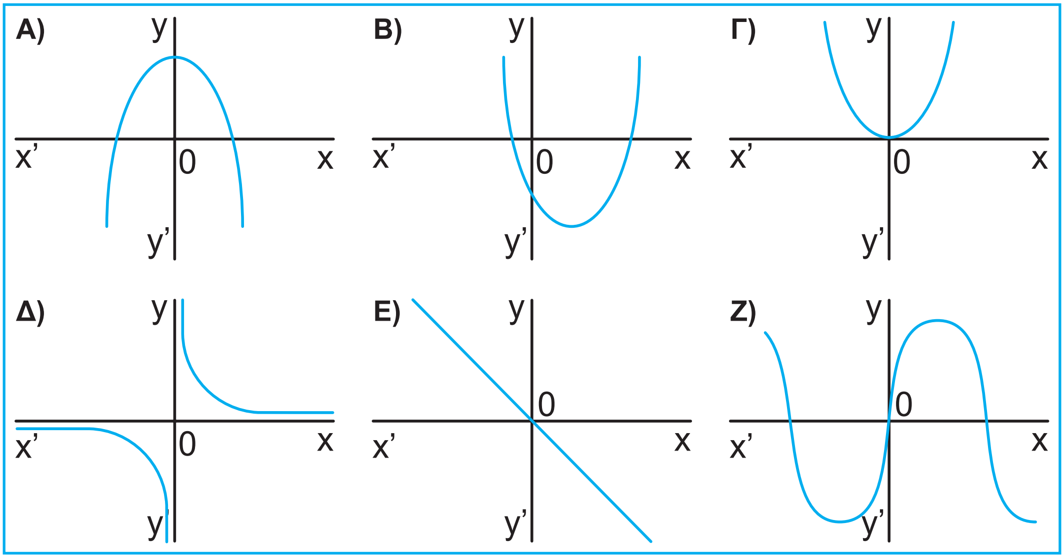


α) του σχήματος Α β) του σχήματος Β γ) του σχήματος Γ

δ) του σχήματος Δ ε) του σχήματος Ε

Ασκησεις Αντιστοίχισης.

1. **Να αντιστοιχίσετε τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις με τους τύπους των συναρτήσεων που παριστάνουν:**



1) $f(x)=2x^2$	2) $f(x)=2x^2+1$	3) $f(x)=1-2x^2$	4) $f(x)=2x^2-3x-4$
5) $f(x)=1-2x$	6) $f(x)=2x$	7) $f(x)=-2x$	8) $f(x)=\eta\mu x$
9) $f(x)=1/x$	10) $f(x)=-1/x$	11) $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$	12) $f(x)=-\sigma\upsilon\nu x$

2. **Να αντιστοιχίσετε κατάλληλα τα στοιχεία των στηλών στον παρακάτω πίνακα.**

Στήλη Α (συναρτήσεις)	Στήλη Β (πεδία ορισμού)
α) $f(x)=2x$	1) R
β) $f(x)=\dfrac{3}{x-1}$	2) $(0,1)$
γ) $f(x)=\dfrac{1}{x}$	3) $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$
δ) $f(x)=\sqrt{x-1}$	4) $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$
ε) $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$	5) R^*
	6) $(1,\infty)$
	7) $[1,\infty)$

3. **Να αντιστοιχίσετε κατάλληλα τα στοιχεία των στηλών στον παρακάτω πίνακα.**

Στήλη Α (συναρτήσεις)	Στήλη Β (πεδία ορισμού)
α) $f(x)=\sqrt{x}$	1) $[0,+\infty)$
β) $f(x)=\sqrt{x+2}$	2) $[-2,+\infty)$
γ) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	3) $(-2,0)\cup(0,+\infty)$
δ) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$	4) $(-\infty,-2]\cup[0,+\infty)$
	5) $(0,+\infty)$
	6) $(-2,0)\cup(0,\infty)$
	7) $(-2,+\infty)$

Ασκήσεις.

1. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 5x + 6$.
   α) Να υπολογίσετε τα: ι) $f(2)$ ιι) $f(-1)$ ιιι) $f(0)$.
   β) Εξετάστε αν η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(3,11)$
   γ) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι αρνητική.

2. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού και τα σημεία τομής με τον άξονα xx' της συνάρτησης f, με τύπο $f(x) = \sqrt{x^3 - 2x^2 + 6x}$ και g με τύπο $g(x) = \sqrt{x^2 - 3x - 4}$.

3. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού και τα σημεία τομής με τον άξονα xx' της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 4}{x - 1}$.

4. Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \dfrac{(x^2+4)(x^2+10x-11)}{x^3 + x^2 - 2x}$ είναι μη αρνητική.

5. Έστω οι συναρτήσεις f με τύπο $f(x) = \alpha x^2 + x - 1$ και g με $g(x) = 2x + 1$.
   α) Να βρεθεί το $\alpha \in R$ ώστε $f(1) = g(1)$.
   β) Να βρεθεί το διάστημα όπου $f(x) < g(x)$.

6. Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 + (\lambda + 1)x + 4$. Να βρεθεί το $\lambda \in R$ ώστε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο $A(1, 7)$. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g με $g(x) = \sqrt{f(x) - 4}$

7. Εστω οι συναρτήσεις f με τύπο $f(x) = \alpha x^2 + \beta x - 3$ και g με $g(x) = 2\sqrt{2x^2 + 2}$. Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in R$ ώστε $f(1) = g(1)$ και η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο $A(-2,-5)$.

8. Εστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 + (\lambda - 1)x + 6$. Να βρεθεί το $\lambda \in R$ ώστε $f(x) < 0$ στο διάστημα $(2,3)$.

9. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \sqrt{x^2 - \lambda x + (\lambda^2 + \lambda + 1)}$ έχει πεδίο ορισμού το R.

10. Εστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1, & x \le 2 \\ 5x - 3, & x > 2 \end{cases}$

    α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.
    β) Να βρεθούν τα $f(2)$, $f(-2)$, $f(3)$.
    γ) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 1$.
    δ) Να γίνει η γραφική παράσταση.

11. Εστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\begin{cases}2x^2-1, & x\geq 2\\ \alpha x-\beta, & x\leq 2\end{cases}$

α) Να βρεθουν τα $\alpha,\beta\in R$ ώστε η f να ορίζεται στο R και η γραφική της παράσταση να διέρχεται από το σημείο Α(0, 4).

β) Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η f είναι θετική.

γ) Να βρεθούν τα σημεία τομής με τον άξονα xx΄.

δ) Να γίνει η γραφική παράσταση.

12. Αν για μια συνάρτηση f ισχύει ότι $2f(x) - f(2x) = -3$ να βρείτε τον τύπο της και να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.

13. Αν για μια συνάρτηση f ισχύει ότι $f(x)-2f\left(\frac{x}{2}-1\right)=-\frac{1}{3}$ να βρείτε τον τύπο της.

14. Αν για μια συνάρτηση f ισχύει ότι $f(x)-f(-x)=\frac{(e^x+1)(e^x-1)}{e^x}$ να βρείτε τον τύπο της και να δείξετε ότι $f(0)=1$.

15. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

ι) $f(x)=\frac{1}{x-1}$ ιι) $f(x)=\frac{3}{x^2-4}$ ιιι) $f(x)=\frac{x}{x^2+3}$

ιν) $f(x)=\frac{1}{|x|-1}$ ν) $f(x)=\frac{1}{e^x+3}$ νι) $f(x)=\frac{x^2-1}{x^3-6x^2+2x-6}$

16. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

ι) $f(x)=\sqrt{|x|-1}$ ιι) $f(x)=\sqrt{x^2-2}$ ιιι) $f(x)=\sqrt{x^2-5x+6}$

ιν) $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$ ν) $f(x)=\sqrt{|x-3|+1}$ νι) $f(x)=\sqrt{e^x+x^2}$

17. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

ι) $f(x)=\frac{\sqrt{x+2}}{x-1}$ ιι) $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x(x+1)}$ ιιι) $f(x)=\sqrt{\frac{x-2}{x-3}}$

ιν) $f(x)=\sqrt{\frac{e^x}{x-2}}$ ν) $f(x)=\sqrt{1+\sqrt{x^2-4}}$ νι) $f(x)=\sqrt{1nx+\sqrt{x}}$

νιι) $f(x)=\frac{\sqrt{|x-1|-2}}{x^2+2x+1}$ νιιι) $f(x)=\sqrt{|e^x+1|-2}$

18. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

ι) $f(x)=\ln(x-1)$ ιι) $f(x)=\ln(|x|+3)$

ιιι) $f(x)=\ln(|x-1|-2)$

ιv) $f(x)=\ln(x^3-6x^2+x-6)$ v) $f(x)=\ln(x^2-x-2)$

19. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

ι) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x-1}+\sqrt{\dfrac{x-2}{x^2+1}}$ ιι) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}+\log(10-x)}{x-5}$ ιιι) $f(x)=\dfrac{\sqrt{16-x^2}}{e^x-1}$

ιv) $f(x)=\sqrt{\ln x-1}+\log(5-x)$ v) $f(x)=\dfrac{1}{\eta\mu x-1}$ vι) $f(x)=\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{\sqrt{x^2-1}}$

20. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού για τις παρακάτω συναρτήσεις.

ι) $f(x) = 2x - 3\ln(4x - 2)$ ιι) $f(x) = \varepsilon\varphi x$ ιιι) $f(x) = \sigma\varphi x$

ιv) $f(x)=\dfrac{x}{\ln(x-1)(e^x-1)}$ v) $f(x)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x-1}$

21. Για ποιες τιμές του $\alpha\in R$ η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{x^2+\alpha}$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο R των πραγματικών αριθμών;

22. Για ποιες τιμές του $\alpha\in R$ η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{1-\alpha x^2}$ έχει πεδίο ορισμού

α) το σύνολο R. β) το σύνολο R-{-1,1}

23. Για ποιες τιμές του $\alpha\in R$ η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+\alpha x}$ έχει πεδίο ορισμού

α) το σύνολο R β) το σύνολο $(-\infty,-1]\cup[0,+\infty)$ γ) το σύνολο $(-\infty,0]\cup[2+\infty)$

24. Για ποιες τιμές του $\alpha\in R$ η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{x^2-x+(\alpha^2-1)}$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο R;

25. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 + 6$. Να βρείτε:

α) Για ποιες τιμές του $x\in R$ έχουμε $f(x) = 0$.

β) το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x)=\dfrac{x}{x^2+6}$

γ) το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $h(x)=\sqrt{x^2+6}$

26. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Να βρείτε:
α) το πεδίο ορισμού της, Α β) για ποιες τιμές του $x \in A$ έχουμε $f(x) = 0$
γ) το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$

27. Εστω οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 2x - 1$ ορισμένη στο $[-10,10]$ και $g(x) = 3x + 1$ ορισμένη στο $[0,20]$.
α) Να ορίσετε τη συνάρτηση fg. β) Ισχύει $(fg)(2) = f(2)g(2)$;
γ) Να ορίσετε την συνάρτηση f/g

28. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 - 9$. Να βρείτε:
α) Για ποιες τιμές του $x \in R$ έχουμε $f(x) = 0$.
β) Για ποιες τιμές του $x \in R$ η συνάρτηση f(x) είναι θετική;
γ) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:
ι) g με $g(x) = \dfrac{x+3}{x^2-9}$ ιι) h με $h(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ ιιι) φ με $\varphi(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-9}}$

29. Εστω οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 3x - 1$ και $g(x) = -x^2 + 1$. Να βρεθούν οι τύποι των παρακάτω συναρτήσεων και τα πεδία ορισμού τους.:
ι) $f(x) + g(x)$ ιι) $f(x) - 3g(x)$ ιιι) $[f(x)]^2 g(x)$ ιν) $f(x)/g(x)$

30. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = x^2 - 4x - 2$ και $g(x) = 3x - 2$, $x \in R$. Να βρεθούν οι τύποι των παρακάτω συναρτήσεων και τα πεδία ορισμού τους:
ι) $2f(x) + g(2x)$ ιι) $3f(x) - 2g(x^2)$ ιιι) $f(x) \cdot g(x)$ ιν) $f(x)/g(x)$

31. Εστω οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 1$ και $g(x) = 2x - 3$. Να βρεθούν οι συναρτήσεις:
ι) $f(x+1) + g(x)$ ιι) $2f(x) - [g(x)]^2$ ιιι) $(x+1)f(x) - g(x^2)$

32. Να υπολογίσετε τα όρια:
ι) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2 + x - 2)$ ιι) $\lim\limits_{x\to e}(1nx - 1)$ ιιι) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu x - 2)$
ιν) $\lim\limits_{x\to 0}(x^3 + 5x^2 - 2x)$ ν) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)$ νι) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(\varepsilon\varphi^2 x + \sigma\varphi x - 1)$

33. Να υπολογίσετε τα όρια:
ι) $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2 - |x-3|)$ ιι) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x-4|}{x^2 + |x+3|}$ ιιι) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x+1| - |x-1|}{x^2 + x}$ +
ιν) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(\eta\mu x + |\sigma\upsilon\nu x - 1|)$ ν) $\lim\limits_{x\to 6}\sqrt{|x-3| + 2x + 10}$

34. Να υπολογίσετε τα όρια:

ι) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+x}{x+1}$ ιι) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$ ιιι) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-9x+9}{x-1}$

35. Αν $\lim\limits_{x\to 1}\left(f(x)+x^2+2x-5\right)=10$ να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$

36. Αν $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x^2-4}=6$ και $\lim\limits_{x\to 2}\left[g(x)\left(2x^3-3x^2+4x-12\right)\right]=1$ να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 1}\left[f(x)g(x)\right]$

37. Αν $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)+3}{x-1}=3$ να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$

38. Αν, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=7$ να βρείτε το $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ όταν:

α) $g(x) = 3f(x)$ β) $g(x) = 3f(x) - 2$ γ) $g(x)=\dfrac{3f(x)}{f(x)-4}$

39. Εστω f συνεχής στο R*. Αν $(x^2 - 9)f(x) = x^2 - 6x + 9$ να βρεθεί το f(3).

40. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = x^2-3x+1$, $g(x) = 5x^2 - 2x + 1$, $x\in R$. Να βρείτε:

α) το $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ και το $\lim\limits_{x\to 1}g(x)$ β) το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3f(x)-g(x)}{2}$

γ) το $\lim\limits_{x\to 1}\left(f(x)+g(x)\right)^3$ δ) το $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{2f(x)-5g(x)+2}$

41. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\dfrac{3x^2+1}{4x-3}\alpha$. Να βρείτε:

α) το $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ β) το $\lim\limits_{x\to 1}\left(f(x)\right)^2$ γ) το $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{f(x)}$

42. Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο (0, π) με $f(x)=\sqrt{2\eta\mu x+1}$. Να βρείτε:

α) το $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}f(x)$ β) το α ώστε $\lim\limits_{x\to \alpha}f(x)=\sqrt{2}$

43. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}, & x\neq 2\\ \alpha, & x=2\end{cases}$. Να βρείτε την τιμή του

$\alpha\in R$, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο σημείο $x_0=2$.

44. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases}\alpha x^2-3, & x\neq 3\\ 4, & x=3\end{cases}$. Να βρείτε την τιμή του $\alpha\in R$, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής.

45. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases}\alpha x^2+\beta x-3, & x\neq 1\\ 12, & x=1\end{cases}$. Να βρείτε την τιμή του $\alpha\in R$, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής και η Cf να διέρχεται από το σημείο A(2,4).

46. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$. Να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της.

β) το $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$

γ) Να εξετάσετε, αν η f(x) είναι συνεχής στη θέση $x_0=4$.

47. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x\neq 5\\ \alpha & x=5\end{cases}$

α) Για $x\neq 5$ είναι συνεχής η συνάρτηση;

β) Για ποια τιμή του $\alpha\in R$ η συνάρτηση f(x) είναι συνεχής στο σημείο $x_0=5$;

48. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases}\alpha x^2-\beta x+1, & x\neq -1\\ 0 & x=-1\end{cases}$. Να βρείτε την τιμή του $\alpha\in R$, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής και $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{x^2-x}$.

49. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x-2}, & x\neq 2\\ 5, & x=2\end{cases}$. Εξετάστε αν η f είναι συνεχής στο $x_0=2$.

50. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}, & x\neq 1\\ 2\alpha-1, & x=1\end{cases}$. Αν $\lim\limits_{x\to\alpha}(3x-2)=10$ να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο $x_0=1$.

Προβλήματα.

51. Η θερμοκρασία μιας μηχανής σε C^o όταν λειτουργεί δίνεται κατά προσέγγιση

από τον τύπο $f(t)=\dfrac{10\sqrt{t^2+3t-5}}{7-t}$ όπου t ο χρόνος λειτουργίας σε ώρες.

α) Ποια θα είναι περίπου η θερμοκρασία μετά από 4 ώρες συνεχούς λειτουργίας;
β) Σε πόσες ώρες η θερμοκρασία θα φτάσει τους 70 C^o;
γ) Ενας θερμοστάτης σταματάει τη μηχανή όταν η θερμοκρασία της ξεπεράσει τους 70 C^o. Αν ο θερμοστάτης δεν λειτουργήσει τι θερμοκρασία αναμένεται να έχει η μηχανή συμπληρώνοντας 7 ώρες συνεχούς λειτουργίας;

52. Ενα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει περίμετρο 12cm. Εκφράστε το εμβαδό του συναρτήσει μιας διάστασής του.

53. Να εκφράσετε την περίμετρο και το εμβαδόν ενός ρόμβου συναρτήσει της μεγάλης διαγωνίου δ αν το άθροισμα των διαγωνίων είναι 15cm.

54. Σύρμα μήκους 6m κόβεται σε δυο κομμάτια με τα οποία κατασκευάζουμε δυο τετράγωνα. Αν το μικρότερο κομμάτι έχει μήκος x να εκφράσετε συναρτήσει του x τη διαφορά των δυο εμβαδών.

55. Σύρμα μήκους 1m κόβεται σε δυο κομμάτια με τα οποία κατασκευάζουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο και ένα τετράγωνο. Αν το κομμάτι που φτιάξαμε το τρίγωνο έχει μήκος x να εκφράσετε συναρτήσει του x το άθροισμα των δυο εμβαδών.

56. Να εκφράσετε τη διαγώνιο δ ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου συναρτήσει μιας πλευράς του αν η περίμετρός του είναι 12cm.

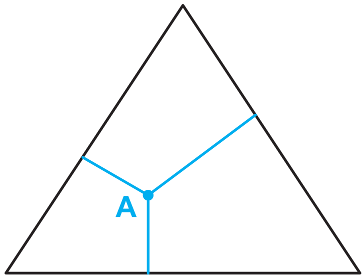
57. Εστω ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές α,β. Από τις τέσσερις γωνίες του αφαιρούμε τετράγωνα κομμάτια πλευράς x. Να εκφράσετε τον όγκο του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου που θα προκύψει με αναδίπλωση των πλευρών συναρτήσει του πλάτους x.

58. Ενα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει μήκος, πλάτος και ύψος ανάλογα προς τους αριθμούς 2, 3 και 5. Να εκφράσετε την επιφάνεια και τον όγκο του ως συνάρτηση του μήκους του.

59. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχει σταθερό εμβαδό ίσο με $10cm^2$. Αν οι κάθετες πλευρές είναι x και y να εκφράσετε το μήκος της διαμέσου της υποτείνουσας ως συνάρτηση του x.

60. Ενα κτήμα σχήματος ορθογωνίου παρ/μου έχει επιφάνεια ίση με $600m^2$. Θέλουμε να το περιφράξουμε με συρματόπλεγμα που κοστίζει 7€/m. Επιπλέον παράλληλα με την πλευρά x θέλουμε να κατασκευάσουμε ξύλινο φράχτη που κοστίζει 3€/m, ώστε να χωρίσουμε το κτήμα στη μέση. Να βρείτε το συνολικό κόστος της κατασκευής συναρτήσει της πλευράς x.

61. Σε ένα κτήμα σχήματος ισοπλεύρου τριγώνου πρόκειται να τοποθετηθούν περιμετρικά αγωγοί νερού που θα συνδέονται από κάθε πλευρά κάθετα με την αντλία που βρίσκεται μέσα στο κτήμα. Το κόστος των αγωγών της περιμέτρου είναι 10€/m και των αγωγών σύνδεσης 18€/m. Να εκφράσετε το κόστος κατασκευής ως συνάρτηση της πλευράς του τριγώνου.



62. Ενα κυλινδρικό δοχείο έχει ύψος 80cm. Να εκφράσετε τον όγκο του ως συνάρτηση της διαμέτρου του.

63. Να εκφράσετε τον όγκο ενός ημισφαιρίου ως συνάρτηση της διαμέτρου του.

64. Ενας κώνος έχει ύψος 20cm. Αν η ακτίνα ρ της βάσης και η γενέτειρα λ έχουν σταθερό άθροισμα 50cm να εκφράσετε τον όγκο και την επιφάνειά του ως συνάρτηση της ακτίνας ρ.

65. Ενα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει τετράγωνη βάση με διαγώνιο δ. Αν το ύψος είναι τριπλάσιο της διαγωνίου να εκφράσετε τον όγκο του ως συνάρτηση της διαγωνίου δ.

66. Ένας κυκλικός τομέας ακτίνας r έχει εμβαδό 50 cm^2. Να εκφράσετε την περίμετρο του ως συνάρτηση της διαμέτρου δ.

1.2 Η Έννοια της Παραγώγου

Απαραίτητες γνώσεις Θεωρίας

Θεωρία 1.

α) Τι είναι η παράγωγος μιας συνάρτησης f στο σημείο x_0;
β) Τι παριστάνει η παράγωγος μιας συνάρτησης f στο σημείο x_0;
γ) Πώς υπολογίζουμε την παράγωγο μιας συνάρτησης f στο σημείο x_0;

Απάντηση:

α) Εστω το όριο $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, $h \neq 0$. Αν αυτό το όριο υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός ονομάζεται **παράγωγος της f στο x_0** και συμβολίζεται $f'(x_0)$. Αρα:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Σημείωση 1:
Το παραπάνω όριο δεν υπάρχει πάντα γι΄αυτό και η ύπαρξη της παραγώγου σε ένα σημείο $x_0 \in A$ δεν είναι πάντα βέβαιη. Το πρόβλημα της ύπαρξης της παραγώγου δεν θα μας απασχολήσει σε αυτή την παράγραφο.

Σημείωση 2:
Ομοια ορίζεται και η **δεύτερη παράγωγος της f στο x_0** και συμβολίζουμε $f''(x_0)$.

$$\text{Ετσι: } f''(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h}$$

Επαγωγικά ορίζεται και η **νιοστή παράγωγος της f στο x_0** και συμβολίζουμε $f^{(\nu)}(x_0)$.

β) Η παράγωγος μιας συνάρτησης f στο σημείο x_0 παριστάνει:

- Την κλίση της εφαπτόμενης ευθείας στη γράφ. παράσταση C_f της συνάρτησης στο σημείο $(x_0, f(x_0))$. Η προηγούμενη έκφραση αποτελεί τη **γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου.**

- Το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης f ως προς x όταν $x = x_0$.

Συνεπώς οι παρακάτω εκφράσεις είναι ισοδύναμες:

$$\left\{\begin{array}{l}\textbf{Κλίση της εφαπτόμενης}\\ \textbf{της } C_f \textbf{ στο } (x_0, f(x_0)).\end{array}\right\} \Leftrightarrow f'(x_0) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\textbf{Ρυθμός μεταβολής της f ως}\\ \textbf{προς x, όταν } x = x_0.\end{array}\right\}$$

Σημείωση:
Υπενθυμίζουμε ότι **κλίση** ή **συντελεστή διεύθυνσης** μιας ευθείας ονομάζουμε την εφθ όπου θ είναι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα xx'.

γ) Για να υπολογίσουμε την παράγωγο μιας συνάρτησης f στο σημείο x_0 κάνουμε τα εξής:

1. Υπολογίζουμε τις ποσότητες $f(x_0+h)$ και $f(x_0)$.

2. Υπολογίζουμε τη διαφορά $\Delta f = f(x_0+h) - f(x_0)$.

3. Υπολογίζουμε το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Παράδειγμα:
Εστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 + 1$. Να βρεθεί η $f'(3)$.

Λύση:

Βήμα 1:
$f(3 + h) = (3 + h)^2 + 1 = 9 + 6h + h^2 + 1 = h^2 + 6h + 10$
$f(3) = 3^2 + 1 = 10$

Βήμα 2:
$\Delta f = f(3 + h) - f(3) = h^2 + 6h + 10 - 10 = h^2 + 6h$

Βήμα 3:

$$f'(3) = \lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2+6h}{h} = \lim_{h\to 0}(h+6) = 6$$

Λυμένες Ασκήσεις.

1. Εστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 2x^2 - 3$. Να βρεθεί η $f'(2)$.

Λύση:

Είναι $f'(2) = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ με $f(2) = 2\cdot 2^2 - 3 = 5$

Αρα: $f'(2) = \lim_{h\to 0}\frac{2h^2+8h+5-5}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(2h+8)}{h} = \lim_{h\to 0}(2h+8) = 8$

2. Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \alpha x^2 + 2$. Να βρεθεί το $\alpha\in R$ ώστε η κλίση της εφαπτόμενης στο σημείο (1,f(1)) να ισούται με 3. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτόμενης στο σημείο (1,f(1)).

Λύση:

α) Πρέπει: $f'(1) = 3 \Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 3$

Είναι $f(1+h) = \alpha(1+h)^2 + 2 = \alpha h^2 + 2\alpha h + \alpha + 2$

και $f(1) = \alpha 1^2 + 2 = \alpha + 2$

Δηλαδή:

$$f'(1) = 3 \Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\frac{\alpha h^2+2\alpha h+\alpha+2-(\alpha+2)}{h} = 3 \Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\frac{\alpha h^2+2\alpha h}{h} = 3 \Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\frac{h(\alpha h+2\alpha)}{h} = 3$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0}(\alpha h+2\alpha) = 3 \Leftrightarrow 2\alpha = 3 \Leftrightarrow \alpha = \frac{3}{2}$$

Αρα: $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2$

β) Έστω $y = \lambda x + \beta$, η εξίσωση της εφαπτόμενης στο σημείο (1,f(1)). Τότε:

$$f(1) = 3\cdot 1+\beta \Leftrightarrow \frac{3}{2}+2 = 3+\beta \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \beta$$

Άρα η εξίσωση της εφαπτόμενης στο σημείο (1,f(1)) είναι: $y = 3x + \frac{1}{2}$.

3. Ενα βακτηρίδιο πολλαπλασιάζεται σύμφωνα με τη συνάρτηση: $N(t) = 2t^2 + t + 3$ $t \geq 0$, όπου N(t) το πλήθος των βακτηριδίων τη χρονική στιγμή t sec.

α) Να βρεθεί το πλήθος των βακτηριδίων μετά από μισό λεπτό.

β) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του πλήθους των βακτηριδίων την ίδια χρονική στιγμή.

Λύση:

α) $N(30) = 2 \cdot 30^2 + 30 + 3 = 1833$

β) $N'(30) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{N(30+h)-N(30)}{h}$ Είναι:

$$N(30+h) = 2(30+h)^2 + (30+h) + 3 = 2(900+60h+h^2) + h + 33 = 2h^2 + 121h + 1833$$

και $N(30) = 2 \cdot 30^2 + 30 + 3 = 1833$

Αρα: $N'(30) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2h^2+121h+1833-1833}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2h^2+121h}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(2h+121)}{h} = \lim_{h\to 0}(2h+121) = 121$$

4. **Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει τη μεγάλη πλευρά του τριπλάσια από τη μικρή. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του ως προς τη μικρή πλευρά όταν αυτή είναι ίση με 2cm.**

Λύση:

Έστω x και y = 3x οι πλευρές. Τότε $E = xy = 3x^2$, $x > 0$

$$E'(2) = \lim_{h\to 0}\frac{E(2+h)-E(2)}{h}$$

Είναι: $E(2+h) = 3(2+h)^2 = 3(4+4h+h^2) = 12 + 12h + 3h^2$

και $E(2) = 3 \cdot 2^2 = 12$

Άρα:

$$E'(2) = \lim_{h\to 0}\frac{12+12h+3h^2-12}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{12h+3h^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(12+3h)}{h} = \lim_{h\to 0}(12+3h) = 12$$

5. **Ενα σφαιρικό μπαλόνι ξεφουσκώνει και η ακτίνα του δίνεται από τον τύπο r(t) = 80 – t, t∈[0,80]. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού της επιφάνειας της σφαίρας ως προς t όταν t = 5 sec.**

Λύση:

Εχουμε: $E = 4\pi r^2$, άρα: $E(t) = 4\pi(80-t)^2$ Άρα: $E'(5) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{E(5+h)-E(5)}{h}$

Είναι: $E(5+h) = 4\pi(80-5-h)^2 = 4\pi(75-h)^2 = 4\pi h^2 - 600\pi h + 22500\pi$

και $E(5) = 4\pi(80-5)^2 = 22500\pi$ Αρα:

$$E'(5) = \lim_{h\to 0}\frac{4\pi h^2 - 600\pi h + 22500\pi - 22500\pi}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{4\pi h^2 - 600\pi h}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(4\pi h - 600\pi)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}(4\pi h - 600\pi) = -600\pi$$

Ερωτήσεις Σωστό – Λάθος.

Χαρακτηρίστε σαν σωστές (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις και αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας. Στις περιπτώσεις λανθασμένων προτάσεων να αναφέρετε ποιό είναι το λάθος και να τις διορθώσετε.

1. Η παράγωγος μιας συνάρτησης f στο x_0 εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της $y = f(x)$ ως προς x όταν $x = x_0$. ( )

2. Η παράγωγος μιας συνάρτησης f υπάρχει για κάθε x του πεδίου ορισμού της. ( )

3. Η $f'(x_0)$ παριστάνει τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη στο C_f στο $(x_0, f(x_0))$ με τον άξονα xx'. ( )

4. Η παράγωγος $f'(x_0)$ μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι πραγματικός αριθμός. ( )

5. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης που είναι η γραφική παράσταση μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f, στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ αυτής, είναι ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x όταν $x = x_0$. ( )

6. Η παράγωγος $f'(x_0)$ μιας συνάρτησης f σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της ισούται με το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, $h\in R$, $h\neq 0$. ( )

7. Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, όταν και μόνο όταν υπάρχει το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, $h\in R$, $h\neq 0$. ( )

8. Η συνάρτηση $f(x) = |x - 1|$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$. ( )

9. Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$. ( )

10. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, $h\neq 0$, ισούται με τον συντελεστή διεύθυν-σης της εφαπτομένης της καμπύλης, που είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ αυτής. ( )

Ερωτήσεις Πολλαπλής Επιλογής.

1. Εστω ότι στο x_0 η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη στον άξονα xx΄. Τότε:
   α) $f'(x_0) = 1$ β) $f'(x_0) = 0$ γ) $f'(x_0) = -1$
   δ) η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ε) κανένα από τα παραπάνω

2. Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν και μόνο αν:
   α) υπάρχει το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(h)}{h}$, $h\in R$, $h\neq 0$
   β) υπάρχει το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, $h\in R$, $h\neq 0$
   γ) υπάρχει το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, $h\in R$, $h\neq 0$ και είναι πραγματικός αριθμός.
   δ) υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, $h\in R$, $h\neq 0$
   ε) κανένα από τα παραπάνω.

3. Εστω συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Η $f'(x_0)$ ισοδυναμεί με:
   α) Το ρυθμό μεταβολής της f συναρτήσει του x όταν x = x_0.
   β) Την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η εφαπτόμενη ευθεία του C_f στο σημείο x_0 με τον άξονα xx'.
   γ) Τα (α) και (β)
   δ) Την γωνία που σχηματίζει η εφαπτόμενη ευθεία του C_f στο σημείο x_0 με τον άξονα xx'.
   ε) Κανένα από τα προηγούμενα.

4. Η εξίσωση της εφαπτομένης της συνάρτησης f με $f(x) = x^2 + 1$ στο σημείο $x_0 = 3$ είναι:
   α) y = 0 β) x = 1 γ) y = 1 δ) y = 3x ε) κανένα από τα παραπάνω

5. Ο ρυθμός μεταβολής της επιφάνειας ενός κύβου ακμής α όταν α = 4 είναι:
   α) 48 β) 24 γ) 16 δ) 36 ε) κανένα από τα παραπάνω

6. Ο ρυθμός μεταβολής της του εμβαδού ενός τετραγώνου πλευράς α όταν α = 1 είναι:
   α) 1 β) 2 γ) 0 δ) 4 ε) κανένα από τα παραπάνω

7. Ο ρυθμός μεταβολής του όγκου ενός κύβου ακμής α όταν α = 10 είναι:
   α) 100 β) 200 γ) 1000 δ) 300 ε) κανένα από τα παραπάνω

8. Ενα σφαιρικό μπαλόνι ξεφουσκώνει. Ο ρυθμός μεταβολής του όγκου του ως προς r όταν r = 1 είναι:
   α) π β) 4π γ) 2π δ) 0 ε) τίποτε από τα προηγούμενα

9. Ενα σφαιρικό μπαλόνι ξεφουσκώνει. Ο ρυθμός μεταβολής της επιφάνειάς του ως προς r όταν r = 2 είναι:

α) 16π β) 4π γ) 32π δ) π ε) τίποτε από τα προηγούμενα

10. Η παράγωγος μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f, σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, εκφράζει:

α) την τιμή της συνάρτησης στη θέση x_0

β) την τιμή του κλάσματος $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, $h \neq 0$

γ) το ρυθμό μεταβολής της f(x) ως προς x, όταν $x = x_0$

δ) το ρυθμό μεταβολής του κλάσματος $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ ως προς h, όταν $h = x_0$

ε) κανένα από τα παραπάνω

11. Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x^2 + 1$ για x = α είναι (για $h \neq 0$)

α) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\alpha^2 + 2\alpha h + h^2 + 1}{h}$ β) γ) α^2

δ) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\alpha^2 + 2\alpha h + h^2 + 1 - (\alpha^2 + 1)}{h}$ ε) κανένα από τα παραπάνω

Ασκήσεις.

1. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{x^2}{3}$, $x \in R$. Να βρείτε:

α) το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της συνάρτησης f, στο σημείο με x = 3

β) την εξίσωση της παραπάνω εφαπτομένης

2. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \alpha x^2$, $x \in R$, $\alpha \in R$.

α) Να βρείτε την $f'(2)$.

β) Να προσδιορίσετε το α, ώστε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο σημείο (2, f(2)) να είναι 4.

3. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 + 1$, $x \in R$.

α) Να προσδιορίσετε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο σημείο με x = 0.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο σημείο (0, f(0)).

4. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 - \alpha x$, $x \in R$, $\alpha \in R$.

α) Να βρείτε την $f'(3)$.

β) Να προσδιορίσετε το α, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο (3, f(3)) να σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία 45°.

1.3 Παράγωγος Συνάρτηση

Απαραίτητες γνώσεις Θεωρίας

Θεωρία 1.

α) Τι ονομάζουμε παράγωγο συνάρτηση;
β) Πως βρίσκουμε τον τύπο της παραγώγου συναρτήσεως;

Απάντηση:

α) Εστω συνάρτηση $f: A \to R$ και B το σύνολο των στοιχείων του A για τα οποία υπάρχει η παράγωγος. Προφανώς $B \subseteq A$. Η συνάρτηση με πεδίο ορισμού το B η οποία αντιστοιχεί κάθε $x \in B$ στην $f'(x)$ ονομάζεται **παράγωγος συνάρτηση** και συμβολίζεται f'.

β) Η εύρεση της παραγώγου με τον ορισμό συνήθως δεν είναι μια απλή διαδικασία. Παρακάτω αναφέρονται οι κανόνες με τους οποίους θα βρίσκουμε ευκολότερα την $f'(x)$ και ονομάζονται κανόνες παραγώγισης.

Α. Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων.

Σταθερή συνάρτηση $f(x) = c$	$f'(x) = \mathbf{(c)' = 0}$
Ταυτοτική συνάρτηση $f(x) = x$	$f'(x) = \mathbf{(x)' = 1}$
Συνάρτηση $f(x) = x^{\nu}$	$f'(x) = \mathbf{(x^{\nu})' = \nu x^{\nu-1}}$ *

Παράδειγμα 1:

$(x^3)' = 3x^{3-1} = 3x^2$

Παράδειγμα 2:

$$\left(\frac{1}{x^3}\right)' = (x^{-3})' = -3x^{-3-1} = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$$

Παράδειγμα 3: $$\left(\sqrt[3]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

* *Ισχύει και για $\kappa \in Z$ όπως φαίνεται και στο παράδειγμα 3.*

Συνάρτηση $f(x) = ημx$	$f'(x) =$ **(ημx)΄ = συνx**
Συνάρτηση $f(x) = συνx$	$f'(x) =$ **(συνx)΄ = - ημx**
Συνάρτηση $f(x) = \ln x$	$f'(x) =$ **(lnx)΄ = 1/x**
Συνάρτηση $f(x) = e^x$	$f'(x) =$ **$(e^x)' = e^x$**

Β. Κανόνες παραγώγισης.

1. Παράγωγος γινομένου αριθμού με συνάρτηση $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$

Παράδειγμα: $(3ημx)' = 3(ημx)' = 3συνx$

2. Παράγωγος αθροίσματος και διαφοράς συναρτήσεων $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

Παράδειγμα: $(\ln x + x^3 - x - 1)' = (\ln x)' + (x^3)' - (x)' - (1)' = 1/x + 3x^2 - 1$

3. Παράγωγος γινομένου συναρτήσεων $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Παράδειγμα: $(e^x συνx)' = (e^x)'συνx + e^x(συνx)' = e^x συνx + e^x(- ημx) = e^x(συνx - ημx)$

4. Παράγωγος πηλίκου συναρτήσεων $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

Παράδειγμα: $\left(\frac{ημx}{x^2}\right)' = \frac{(ημx)'x^2 - ημx(x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{συνx \cdot x^2 - ημx \cdot 2x}{x^4} = \frac{xσυνx - 2ημx}{x^3}$

Γ. Παράγωγος σύνθεσης συναρτήσεων

Η παράγωγος σύνθετης συνάρτησης δίνεται από τον τύπο: **$(g(f(x)))' = g'(f(x))f'(x)$**

Παράδειγμα: Να βρεθεί $(ημ(3x^2 + 1))'$

Λύση:

Έστω $g(f(x)) = (ημ(3x^2 + 1))$,

τότε: $g(x) = ημx$ $\quad g'(x) = συνx$ $\quad$ και: $f(x) = (3x^2 + 1)$ $\quad f'(x) = 6x$

Αρα: $(ημ(3x^2 + 1))' = συν(3x^2 +)6x$

Για την παράγωγο σύνθετης συνάρτησης αντί του παραπάνω τύπου χρησιμοποιούνται και οι ακόλουθοι κανόνες παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης.

$[(\varphi(x))^{\nu}]' = \nu(\varphi(x))^{\nu-1}\varphi'(x),\ \nu \in Q$

Παράδειγμα:
$(\eta\mu^5 x)' = 5\eta\mu^4 x(\eta\mu x)' = 5\eta\mu^4 x\sigma\upsilon\nu x$

$[\eta\mu(\varphi(x))]' = \sigma\upsilon\nu(\varphi(x))\varphi'(x)$

Παράδειγμα:
$(\eta\mu(3x+\ln x))' = \sigma\upsilon\nu(3x+\ln x)(3x+\ln x)' =$
$= \sigma\upsilon\nu(3x+\ln x)(3+1/x)$

$[\sigma\upsilon\nu(\varphi(x))]' = -\eta\mu(\varphi(x))\varphi'(x)$

Παράδειγμα:
$(\sigma\upsilon\nu e^x)' = -\eta\mu e^x(e^x)' = -e^x\eta\mu e^x$

$[\ln(\varphi(x))]' = \varphi'(x) / \varphi(x)$

Παράδειγμα:

$$(\ln(\eta\mu x))' = \frac{(\eta\mu x)'}{\eta\mu x} = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = \sigma\phi x$$

$[e^{\varphi(x)}]' = e^{\varphi(x)}\ \varphi'(x)$

Παράδειγμα:

$$\left(e^{3x^2+1}\right)' = e^{3x^2+1}(3x^2+1)' = e^{3x^2+1}6x$$

Θεωρία 2.

α) Πως υπολογίζεται η στιγμιαία και η μέση ταχύτητα ενός κινητού;
β) Πως υπολογίζεται η στιγμιαία επιτάχυνση ενός κινητού;

α) Η απόσταση από το σημείο εκκίνησης ενός υλικού σημείου που κινείται ευθύγραμμα υπολογίζεται με τη βοήθεια μιας συνάρτησης με μεταβλητή το χρόνο t π.χ. $S(t) = t^3 + 2t$. Τότε:

Η μέση ταχύτητα δίνεται από τον τύπο: $\bar{\upsilon} = \dfrac{S(t_{\tau\epsilon\lambda}) - S(t_{\alpha\rho\chi})}{t_{\tau\epsilon\lambda} - t_{\alpha\rho\chi}}$

Παράδειγμα: Για $x \in [1,3]$ έχουμε $\bar{\upsilon} = \dfrac{S(3)-S(1)}{3-1} = \dfrac{33-3}{2} = 15m/sec$

Η στιγμιαία ταχύτητα είναι η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης $S(t)$ δηλαδή **υ(t) = S/(t)**

Παράδειγμα: $\upsilon(t) = s'(t) = (t^3 + 2t)' = 3t^2 + 2$

β) Η στιγμιαία επιτάχυνση ενός κινητού είναι η πρώτη παράγωγος της ταχύτητας και η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης S(t) δηλαδή **α(t) = υ΄(t) = S΄΄(t)**

Παράδειγμα: $α(t) = υ΄(t) = (3t^2 + 2)΄ = 6t$

Θεωρία 3.

Πως υπολογίζεται η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας σε σημείο $(x_0,f(x_0))$ της γραφικής παράστασης της f ;

Σε ασκήσεις με εφαπτόμενες ευθείες στη γραφική παράσταση της f τα δεδομένα της άσκησης είναι συνήθως δυο από τα εξής:

1) Τύπος f(x) **2) Σημείο επαφής $(x_0,f(x_0))$** **3) Κλίση εφαπτόμενης λ**

με τη βοήθεια των οποίων θα βρούμε το τρίτο στοιχείο.

Η κλίση της εφαπτόμενης σαν δεδομένο δίνεται:

*Αμεσα.

*Εμμεσα, συνήθως με έναν από τους εξής τρόπους:

α) Μέσω της γωνίας φ που σχηματίζει η εφαπτόμενη με τον άξονα xx΄.
Τότε από τον ορισμό της κλίσης ευθείας έχουμε **λ = εφφ**

β) Μέσω παραλληλίας με γνωστή ευθεία y = αx + β.
Τότε από τη συνθήκη παραλληλίας ευθειών έχουμε **λ = α.**

γ) Μέσω καθετότητας με γνωστή ευθεία y = αx + β.
Τότε από τη συνθήκη καθετότητας ευθειών έχουμε λα = – 1 άρα **λ = – 1/α**

Τότε ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

Βήμα 1: Βρίσκουμε ποιο από τα (1), (2), (3) είναι άγνωστο και ποια δεδομένα

Βήμα 2: Βρίσκουμε την f΄(x).

Βήμα 3: Λύνουμε την εξίσωση $λ = f΄(x_0)$

Βήμα 4: Για να βρούμε την εξίσωση εφαπτόμενης όταν ζητείται, εφαρμόζουμε ένα από τους δύο ακόλουθους τρόπους:

Α τρόπος:

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση y = λx + β τις συντεταγμένες του σημείου επαφής $(x_0,f(x_0))$ και παίρνω $f(x_0) = f΄(x_0)x_0 + β$ και υπολογίζουμε το β.

Β τρόπος:

Εφαρμόζουμε τον τύπο εξίσωσης ευθείας που διέρχεται από σταθερό σημείο $(x_0,f(x_0))$ με $λ = f΄(x_0)$ δηλαδή: $\mathbf{y - f(x_0) = f΄(x_0)(x - x_0)}$

Παράδειγμα:
Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης του γραφήματος της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = x^2 - 3x + 8$ που είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 9x - 3$.

Λύση:

Βήμα 1.
Βρίσκουμε δεδομένα και ζητούμενο:
(1) Τύπος $f(x) = x^2 - 3x + 8$ (γνωστός)
(2) Σημείο επαφής $(x_0, f(x_0))$ (άγνωστο)
(3) Κλίση εφαπτόμενης $\lambda = 9$ λόγω παραλληλίας με την ευθεία $y = 9x - 3$ (γνωστή)

Βήμα 2.
Βρίσκουμε την $f'(x)$
$f'(x) = (x^2 - 3x + 8)' = 2x - 3$

Βήμα 3.
Λύνουμε την εξίσωση: $\lambda = f'(x_0) \Leftrightarrow 9 = 2x_0 - 3 \Leftrightarrow 6 = x_0$
Άρα: $f(x_0) = f(6) = 6^2 - 3 \cdot 6 + 8 = 36 - 18 + 8 = 26$

Βήμα 4.
Εστω $y = \lambda x + \beta$
η εξίσωση της εφαπτόμενης.
Τότε: $f(6) = 9 \cdot 6 + \beta \Leftrightarrow 26 = 54 + \beta \Leftrightarrow 28 = \beta$
Αρα η εξίσωση της εφαπτόμενης θα είναι: $y = 9x + 28$

Λυμένες Ασκήσεις.

1. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων με τύπους:

α) $f(x)=\dfrac{\eta\mu 2x+3}{e^x}$ **β)** $g(x)=\ln(\eta\mu 5x^2)$ **γ)** $h(x)=\sqrt{\dfrac{\eta\mu(3x+2)}{e^{x^2+x-1}}}$

Λύση:

α) $f'(x)=\left(\dfrac{\eta\mu 2x+3}{e^x}\right)'=\dfrac{(\eta\mu 2x+3)'e^x-(\eta\mu 2x+3)(e^x)'}{(e^x)^2}=$

$=\dfrac{\sigma\upsilon\nu 2x(2x)'e^x-(\eta\mu 2x+3)e^x}{(e^x)^2}=\dfrac{e^x(2\sigma\upsilon\nu 2x-\eta\mu 2x-3)}{(e^x)^2}=\dfrac{2\sigma\upsilon\nu 2x-\eta\mu 2x-3}{e^x}$

β) $g'(x)=[\ln(\eta\mu 5x^2)]'=\dfrac{1}{\eta\mu 5x^2}(\eta\mu 5x^2)'=\dfrac{\sigma\upsilon\nu 5x^2}{\eta\mu 5x^2}(5x^2)'=\dfrac{10x\sigma\upsilon\nu 5x^2}{\eta\mu 5x^2}=10x\sigma\varphi 5x^2$

γ) $h'(x)=\left(\sqrt{\dfrac{\eta\mu(3x+2)}{e^{x^2+x-1}}}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{\eta\mu(3x+2)}{e^{x^2+x-1}}}}\left(\dfrac{\eta\mu(3x+2)}{e^{x^2+x-1}}\right)'=$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{\eta\mu(3x+2)}{e^{x^2+x-1}}}}\cdot\frac{[\eta\mu(3x+2)]'e^{x^2+x-1}-[\eta\mu(3x+2)](e^{x^2+x-1})'}{(e^{x^2+x-1})^2}=$$

$$=\frac{\dfrac{\sigma\upsilon\nu(3x+2)(3x)'e^{x^2+x-1}-[\eta\mu(3x+2)]e^{x^2+x-1}(x^2+x-1)'}{(e^{x^2+x-1})^2}}{2\sqrt{\dfrac{\eta\mu(3x+2)}{e^{x^2+x-1}}}}$$

$$=\frac{e^{x^2+x-1}[3\sigma\upsilon\nu(3x+2)-\eta\mu(3x+2)(2x+1)]}{2\sqrt{\dfrac{\eta\mu(3x+2)}{e^{x^2+x-1}}}(e^{x^2+x-1})^2}=\frac{3\sigma\upsilon\nu(3x+2)-\eta\mu(3x+2)(2x+1)}{2\sqrt{\dfrac{\eta\mu(3x+2)}{e^{x^2+x-1}}}e^{x^2+x-1}}$$

2. Να αποδείξετε ότι ισχύει $[f(x)g(x)h(x)]'=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)$

Λύση:

$[f(x)g(x)h(x)]'=[(f(x)g(x))h(x)]'$
$=(f(x)g(x))'h(x)+(f(x)g(x))h'(x)$
$=[f'(x)g(x)+f(x)g'(x)]h(x)+f(x)g(x)h'(x)$
$=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)$

3. Να βρεθεί ο τύπος της πολυωνυμικής συνάρτησης f για την οποία ισχύει f(0) = 3, f΄(0) = -2 και f΄΄(x) = 12x + 12.

Λυση:

Αν f(x) πολυώνυμο ν-οστού βαθμού, τότε f΄(x) πολυώνυμο βαθμού ν - 1.

Επειδή: $f''(x) = 12x + 12$, η f(x) είναι 3ου βαθμού, άρα: $f(x) = αx^3 + βx^2 + γx + δ$

$f'(x) = (αx^3 + βx^2 + γx + δ)' = 3αx^2 + 2βx + γ$

$f''(x) = (3αx^2 + 2βx + γ)' = 6αx + 2β$

Αρα: $6αx + 2β = 12x + 12 \Rightarrow \begin{cases} 6α = 12 \Leftrightarrow α = 2 \\ 2β = 12 \Leftrightarrow β = 6 \end{cases}$

Επίσης: $f'(0) = -2 \Leftrightarrow γ = -2$ $\qquad f(0) = 3 \Leftrightarrow δ = 3$

Άρα: $f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 2x + 3$

4. Εστω κύλινδρος του οποίου το ύψος h και η διάμετρος δ της βάσης έχουν άθροισμα ίσο με 30cm.
α) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του όγκου του ως προς την ακτίνα r.
β) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της επιφάνειάς του ως προς το ύψος h.

Λύση:

α) Έχουμε: $V = πr^2h$

Ομως: $h + 2r = 30 \Leftrightarrow h = 30 - 2r$

Αρα: $V(r) = πr^2(30 - 2r) = π(30r^2 - 2r^3)$, $0 < r < 15$

Αρα: $V'(r) = π(30r^2 - 2r^3)' = π(60r - 6r^2)$

β) Έχουμε: $E = 2πr^2 + 2πrh$

Ομως: $h + 2r = 30 \Leftrightarrow r = \dfrac{30-h}{2}$

Άρα: $E(h) = 2π\left(\dfrac{30-h}{2}\right)^2 + 2π\dfrac{30-h}{2}h = \dfrac{π(30-h)^2}{2} + π(30-h)h$, $0 < h < 30$

$$E'(h) = \frac{π[(30-h)^2]'}{2} + π[(30-h)h]' = \frac{π(900-60h+h^2)'}{2} + π(30h-h^2)' =$$

$$\frac{π(-60+2h)}{2} + π(30-2h) = π(-30+h+30-2h) = -πh$$

5. Οι διαγώνιοι $δ_1$ και $δ_2$ ενός ρόμβου μεταβάλλονται ως εξής: η $δ_1$ αυξάνεται με ρυθμό 4mm/sec και η $δ_2$ μειώνεται με ρυθμό 6mm/sec. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του ρόμβου ως προς χρόνο t τη χρονική στιγμή που: $δ_1 = δ_2 = 10$mm.

Λύση:

Ισχύει $E=\frac{\delta_1\delta_2}{2}$. Άρα: $E(t)=\frac{\delta_1(t)\delta_2(t)}{2}$

$$E'(t)=\left(\frac{\delta_1(t)\delta_2(t)}{2}\right)'\Leftrightarrow E'(t)=\frac{1}{2}[\delta_1{}'(t)\delta_2(t)+\delta_1(t)\delta_2{}'(t)]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E'(t)=\frac{1}{2}[4mm/sec\cdot 10mm+10mm(-6mm/sec)]\Leftrightarrow E'(t)=-10mm^2/sec$$

6. **Ο όγκος ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με τετράγωνη βάση αυξάνει με ρυθμό $30cm^3/sec$.**

α) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της ακμής της βάσης β τη χρονική στιγμή που ο ρυθμός μεταβολής του ύψους α είναι 3cm/sec και το ύψος του που είναι διπλάσιο της ακμής της βάσης είναι ίσο με 10cm.

β) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της επιφάνειας του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου την ίδια χρονική στιγμή.

Λύση:

α) Ισχύει: $V=\alpha\beta^2$ άρα $V(t)=\alpha(t)\beta^2(t)$

$$V'(t)=[\alpha(t)\beta^2(t)]'\Leftrightarrow V'(t)=\alpha'(t)\beta^2(t)+\alpha(t)(\beta^2(t))'\Leftrightarrow$$

$$\beta'(t)=\frac{V'(t)-\alpha'(t)\beta^2(t)}{2\alpha(t)\beta(t)}\Leftrightarrow \beta'(t)=\frac{30cm^3/sec-3cm/sec(5cm)^2}{2\cdot 10cm5cm}\Leftrightarrow \beta'(t)=-4,5cm/sec$$

β) Ισχύει: $E=2\beta^2+4\alpha\beta$ άρα: $E(t)=2\beta^2(t)+4\alpha(t)\beta(t)$

$E'(t)=2[\beta^2(t)]'+4[\alpha(t)\beta(t)]'=4\beta(t)\beta'(t)+4\alpha'(t)\beta(t)+4\alpha(t)\beta'(t)=$

$=4?5cm(-4,5cm/sec)+4?3cm/sec?5cm+4?10cm(-4,5cm/sec)=$

$=-90cm^2/sec-120cm^2/sec=$

$=-210cm^2/sec$

7. **Η θέση ενός σώματος που κινείται ευθύγραμμα δίνεται από τη συνάρτηση $S(t)=\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}-6t+14$, όπου t σε sec. Να βρεθούν:**

α) η απόσταση από το σημείο εκκίνησης μετά από 3sec.

β) η μέση ταχύτητα για $t\in[4,5]$.

γ) η στιγμιαία ταχύτητα για t = 11sec.

δ) οι χρονικές στιγμές που το σώμα ήταν ακίνητο.

ε) η επιτάχυνση του κινητού.

Λύση:

α) $S(3)=\frac{3^3}{3}-\frac{3^2}{2}-6\cdot 3+14=0,5m$

β) $\overline{\upsilon} = \dfrac{S(5)-S(4)}{5-4} = S(5)-S(4) = \left(\dfrac{5^3}{3}-\dfrac{5^2}{2}-6\cdot 5+14\right)-\left(\dfrac{4^3}{3}-\dfrac{4^2}{2}-6\cdot 4+14\right) =$

$= \dfrac{79}{6}-\dfrac{20}{6} \approx 9{,}83 m/sec$

γ) $\upsilon(t) = S'(t) = \left(\dfrac{t^3}{3}-\dfrac{t^2}{2}-6t+14\right)' = t^2-t-6$, οπότε $\upsilon(11) = 11^2-11-6 = 104 m/sec$

δ) $\upsilon(t) = 0 \Leftrightarrow t^2-t-6=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=-2 & \text{απορ.} \\ t=3 sec \end{cases}$

ε) $\alpha(t) = \upsilon'(t) = (t^2-t-6)' = 2t-1$

8. Εστω η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + 3$, α, β∈R
α) Να βρεθούν τα α,β ώστε η εφαπτόμενη στο σημείο Α(2,3) να σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα xx΄.
β) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτόμενης στο Α(2,3).

Λύση:

α) Τύπος: $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + 3$
Σημείο επαφής: $(x_0, f(x_0)) = (2,3)$
Κλίση εφαπτόμενης: $\lambda = \varepsilon\varphi 45^o = 1$
$f'(x) = (\alpha x^2 + \beta x + 3)' = 2\alpha x + \beta$

$\lambda = f'(x_0) \Leftrightarrow 1 = f'(2) \Leftrightarrow 1 = 4\alpha + \beta$ **(1)**

Επίσης το σημείο Α(2, 3) ανήκει στη γραφική παράσταση της f άρα:
$f(2) = 3 \Leftrightarrow 4\alpha + 2\beta + 3 = 3 \Leftrightarrow 4\alpha + 2\beta = 0$ **(2)**

Με αφαίρεση κατά μέλη των **(1)** και **(2)** παίρνουμε: $\beta = -1$

Αρα: **(1)** $\Leftrightarrow 4\alpha - 1 = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1/2$. Άρα: $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - x + 3$

β) Εστω $y = \lambda x + \beta$ η εξίσωση της εφαπτόμενης. Τότε το σημείο Α(2,3) επαληθεύει την εξίσωση, δηλαδή: $3 = 12 + \beta \Leftrightarrow 1 = \beta$. Άρα: $y = x + 1$

9. Εστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$
α) Να βρεθεί το σημείο της γραφικής παράστασης στο οποίο
ι) η εφαπτόμενη είναι παράλληλη στην ευθεία ε: $y = 3x + 2$
ιι) η εφαπτόμενη είναι κάθετη στην ίδια ευθεία.
β) Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτόμενων σε κάθε περίπτωση.

Λύση:

α) Τύπος: $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$

Σημεία επαφής: $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$

ι) Κλίση εφαπτόμενης: $\lambda_1 = 3$ λόγω παραλληλίας με την ευθεία ε: $y = 3x + 2$

$f'(x) = (2x^2 - 3x + 1)' = 4x - 3$

$\lambda_1 = f'(x_1) \Leftrightarrow 3 = f'(x_1) \Leftrightarrow 3 = 4x_1 - 3 \Leftrightarrow x_1 = 3/2$

$f\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\frac{3}{2} + 1 = 1$, άρα το σημείο είναι το: $A\left(\frac{3}{2}, 1\right)$

ιι) Κλίση εφαπτόμενης: $\lambda_2 = -1/3$ λόγω καθετότητας με την ευθεία ε: $y = 3x + 2$

$\lambda_2 = f'(x_2) \Leftrightarrow -1/3 = f'(x_2) \Leftrightarrow -1/3 = 4x_2 - 3 \Leftrightarrow x_2 = 2/3$

$f\left(\frac{2}{3}\right) = 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 3\frac{2}{3} + 1 = -\frac{1}{9}$ άρα το σημείο είναι το: $B\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{9}\right)$

β) Για το $A\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ έχουμε έστω $y = \lambda_1 x + \beta$ η εξίσωση της εφαπτόμενης.

Τότε: $1 = 3\frac{3}{2} + \beta \Leftrightarrow \beta = -\frac{7}{2}$

Άρα η εξίσωση της εφαπτόμενης είναι: $y = 3x - \frac{7}{2}$

Για το $B\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{9}\right)$ έχουμε έστω $y = \lambda_2 x + \gamma$ η εξίσωση της εφαπτόμενης. Τότε:

$-\frac{1}{9} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \gamma \Leftrightarrow \gamma = \frac{1}{9}$

Άρα η εξίσωση της εφαπτόμενης είναι: $y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{9}$

10. Εστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = e^{2x}$ημx. Δείξτε ότι $f''(x) + 5f(x) = 4f'(x)$.

Λύση:

$f'(x) = (e^{2x}\eta\mu x)' = (e^{2x})'\eta\mu x + e^{2x}(\eta\mu x)' = e^{2x}(2x)'\eta\mu x + e^{2x}\sigma\upsilon\nu x = 2e^{2x}\eta\mu x + e^{2x}\sigma\upsilon\nu x = 2f(x) + e^{2x}\sigma\upsilon\nu x$

$f''(x) = (2f(x) + e^{2x}\sigma\upsilon\nu x)' = 2f'(x) + (e^{2x}\sigma\upsilon\nu x)' = 2f'(x) + (e^{2x})'\sigma\upsilon\nu x + e^{2x}(\sigma\upsilon\nu x)' =$
$= 2f'(x) + e^{2x}(2x)'\sigma\upsilon\nu x - e^{2x}\eta\mu x = 2f'(x) + 2e^{2x}\sigma\upsilon\nu x - f(x)$

Αρα: $f''(x) + 5f(x) = 2f'(x) + 2e^{2x}\sigma\upsilon\nu x - f(x) + 5f(x) = 4f(x) + 4e^{2x}\sigma\upsilon\nu x + 4f(x) = 4[2f(x) + e^{2x}\sigma\upsilon\nu x] = 4f'(x)$

Ερωτήσεις Σωστό – Λάθος.

Χαρακτηρίστε σαν σωστές (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις και αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας. Στις περιπτώσεις λανθασμένων προτάσεων να αναφέρετε ποιό είναι το λάθος και να τις διορθώσετε.

1. Η παράγωγος συνάρτηση f΄ έχει πάντα το ίδιο πεδίο ορισμού με την f. ( )

2. Η συνάρτηση f ΄με $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, h ≠ 0, όπου x τα σημεία του πεδίου ορισμού της f στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη, λέγεται (πρώτη) παράγωγος της f. ( )

3. Η παράγωγος (αν υπάρχει) της συνάρτησης g΄ λέγεται πρώτη παράγωγος της g. ( )

4. Η παράγωγος (αν υπάρχει) της συνάρτησης g΄΄ λέγεται τρίτη παράγωγος της g. ( )

5. Η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης f(x) = c είναι 0. ( )

6. Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{x}$ είναι $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. ( )

7. Η παράγωγος της συνάρτησης f(x) = εφx είναι f΄(x) = εφx. ( )

8. Η παράγωγος της συνάρτησης $g(κ) = κ^q$, όπου $q \in Q$, είναι $g'(κ) = qκ^{q-1}$. ( )

9. Η παράγωγος της συνάρτησης f(x) = ημx είναι: f ΄(x) = συνx. ( )

10. Η παράγωγος της συνάρτησης f(x) = συνx είναι f΄(x) = (συνx)΄= - ημx. ( )

11. Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = e^x$ είναι $f'(x) = (e^x)' = e^x$. ( )

12. Η παράγωγος της συνάρτησης f(x) = lnx είναι $f'(x) = (\ln x)' = x^{-1}$. ( )

13. Ισχύει (ημx)΄΄= - ημx. ( )

14. Ισχύει $(e^x)'' = (e^x)'$ ( )

15. Ισχύει f΄(x)g΄(x) = (f(x)g(x))΄ ( )

16. Είναι (xlnx)΄= lnx – 1. ( )

17. Ισχύει [f(g(x))]΄= f΄(g(x))g΄(x) ( )

18. Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = ημ^2x$ είναι f΄(x)= 2xσυνx. ( )

19. Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{\ln x - 1}$ είναι $f'(x)=\frac{1}{2x\sqrt{\ln x-1}}$ ( )

20. Εστω η συνάρτηση $f(x) = 2x^2y + y^2$. Ο ρυθμός μεταβολής της ως προς x θα είναι ο 4xy και ο ρυθμός μεταβολής της ως προς y θα είναι $2x^2 + 2y$. ( )

21. Ισχύει $(\ln x^2)' = [(\ln x)^2]'$. ( )

22. Ισχύει $(\ln \alpha x)' = [(\ln x)]'$ για κάθε $\alpha \in R$. ( )

23. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = 1/e^x$. Τότε $f''(x) + 2f'(x) - f(x) = 0$. ( )

24. Η εφαπτομένη της συνάρτησης f με $f(x) = 3x^2$ στο σημείο $x_0 = 0$ είναι παράλληλη στον άξονα xx'. ( )

25. Οι εφαπτομένες της συνάρτησης f με $f(x) = 3x + 1$ σε τυχαία σημεία του πεδίου ορισμού της έχουν την ίδια κλίση. ( )

26. Αν η πρώτη παράγωγος μιας συνάρτησης g είναι η σταθερή συνάρτηση, τότε η g είναι της μορφής: $g(x) = \alpha x^2 + \beta$. ( )

27. Αν η πρώτη παράγωγος μιας πολυωνυμικής συνάρτησης g είναι 4ου βαθμού, τότε η g είναι 5ου βαθμού. ( )

28. Αν η δεύτερη παράγωγος μιας πολυωνυμικής συνάρτησης g είναι σταθερή, τότε η g είναι το πολύ 2ου βαθμού. ( )

29. Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = 5$ είναι $f'(x) = 5x$. ( )

30. Η παράγωγος της συνάρτησης $s(t) = t$ είναι $s'(t) = 1$. ( )

31. Η επιτάχυνση ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα με ταχύτητα $\upsilon(t) = 2t^2 - 1$ είναι $\alpha(t) = 4t$. ( )

32. Ένα κινητό που κινείται κατά μήκος του άξονα xx' με ταχύτητα $\upsilon(t) = 4t$ εκτελεί ευθύγραμμα ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση. ( )

Ερωτήσεις Πολλαπλής Επιλογής.

1. Εστω η συνάρτηση f με $f(x) = 3x^3 + 5x^2 - 1$. Τότε η $f'(0)$ είναι:
α) 0 β) 1 γ) - 1 δ) 3 ε) τίποτε από τα προηγούμενα

2. Εστω η συνάρτηση f με $f(x) = f'(x)$, τότε:
α) $f(x) = e^x$ β) $f(x) = \ln x$ γ) $f(x) = ημx$
δ) $f(x) = συνx$ ε) τίποτε από τα προηγούμενα

3. Εστω η συνάρτηση f με $f(x) = - f'(x)$, τότε:
α) $f(x) = \ln x$ β) $f(x) = ημx$ γ) $f(x) = συνx$
δ) $f(x) = e^{-x}$ ε) τίποτε από τα προηγούμενα

4. Εστω η συνάρτηση f με $f(x) = |x| + 1$, τότε:
α) $f'(0) = 1$ β) $f'(0) = \underline{+}1$ γ) $f'(0) = 0$
δ) δεν υπάρχει η $f'(x)$ στο 0 ε) τίποτε από τα προηγούμενα

5. Εστω η συνάρτηση f με $f(x) = |x + 1|$, τότε:
α) $f'(0) = 1$ β) $f'(0) = \underline{+}1$ γ) $f'(0) = 0$
δ) δεν υπάρχει η $f'(x)$ στο 0 ε) τίποτε από τα προηγούμενα

6. Εστω η συνάρτηση f με $f(x) = ημx$, τότε:
α) $f'(0) = 1$ β) $f'(0) = - 1$ γ) $f'(0) = 0$
δ) δεν υπάρχει η $f'(x)$ ε) τίποτε από τα προηγούμενα

7. Εστω η συνάρτηση f με $f(x) = f^{(2ν)}(x)$, τότε:
α) $f(x) = \ln x$ β) $f(x) = ημx$ γ) $f(x) = συνx$
δ) $f(x) = e^{-x}$ ε) τίποτε από τα προηγούμενα

8. Εστω η συνάρτηση f με $f(x) = α_ν x^ν + α_{ν-1}x^{ν-1} + \ldots + α_2x^2 + α_1x^ν + α_0$, τότε:
α) $f^{(ν+1)}(1) = α_ν$ β) $f^{(ν+1)}(1) = α_0$ γ) $f^{(ν+1)}(1) = 0$
δ) $f^{(ν+1)}(1) = ν+1$ ε) τίποτε από τα προηγούμενα

9. Εστω η συνάρτηση f με $f'(x) = 1$, τότε:
α) $f(x) = c$ β) $f(x) = x$ γ) $f(x) = ημx$
δ) $f(x) = \ln x$ ε) τίποτε από τα προηγούμενα

10. Η πρώτη παράγωγος της f με $f(x) = ημx^2$ είναι:
α) $συνx^2$ β) $2ημx^2$
γ) $2xσυνx^2$ δ) $ημx^2\ συνx^2$ ε) τίποτε από τα προηγούμενα

11. Η πρώτη παράγωγος της f με f(x) = ημxσυνx είναι:
α) $συν^2x$ β) $ημ^2x$ γ) συν2x
δ) ημ2x ε) τίποτε από τα προηγούμενα

12. Η πρώτη παράγωγος της f με $f(x) = \ln^2 x$ είναι:

α) 2lnx β) ln2x γ) 2ln2x δ) $\frac{2\ln 2x}{x}$ ε) $\frac{2\ln x}{x}$

13. Αν ο μεγιστοβάθμιος όρος μιας πολυωνυμικής συνάρτησης είναι $αx^ν$, $ν \in N^*$ όπου: $α \neq 0$, $α \neq 1$, τότε η παράγωγός της είναι:
α) σταθερή συνάρτηση
β) τριγωνομετρική συνάρτηση
γ) πολυωνυμική συνάρτηση με μεγιστοβάθμιο όρο τον $α^ν x^{ν-1}$
δ) πολυωνυμική συνάρτηση με μεγιστοβάθμιο όρο τον $ναx^{ν-1}$
ε) δεν μπορούμε να το γνωρίζουμε χωρίς τον τύπο της συνάρτησης.

14. Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$ είναι:

α) σύνθεση των συναρτήσεων $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = x^2 - 2x + 1$.

β) σύνθεση των συναρτήσεων $f(x) = x^2 - 2x$ και $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

γ) άλλη μορφή της συνάρτησης f(x) = x + 1
δ) άλλη μορφή της συνάρτησης f(x) = x – 1
ε) κανένα από τα παραπάνω.

15. Η συνάρτηση f(x) = συν2x είναι:
α) άλλη μορφή της συνάρτησης f(x) = 2συνx
β) η παράγωγος της συνάρτησης f(x) = ημ2x
γ) σύνθεση των συναρτήσεων f(x) = συνx, g(x) = 2x
δ) η παράγωγος της συνάρτησης $ημx^2$.
ε) κανένα από τα παραπάνω

16. Αν L(x) = f(g(x)), όπου f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις, τότε:
α) $L'(x) = f'(g(x))$ β) $L'(x) = f'(x)g'(x)$ γ) $L'(x) = f'(x) + g'(x)$
δ) $L'(x) = f'(g(x))f(x)$ ε) $L'(x) = f'(g(x))g'(x)$

17. Αν $f(x) = \ln\sqrt{x}$ τότε η $f'(x)$ είναι:
α) 0 β) 1 γ) 2 δ) x^2 ε) $\frac{1}{2x}$

18. Αν f(x) = εφx τότε η $f'(x)$ είναι:

α) σφx β) – σφx γ) $\frac{1}{συν^2 x}$

δ) $\frac{1}{ημ^2 x}$ ε) κανένα από τα προηγούμενα.

19. Αν f(x) = σφx τότε η f΄(x) είναι:

α) εφx β) $\frac{1}{\text{εφx}}$ γ) $-\frac{1}{\text{συν}^2 x}$ δ) $-\frac{1}{\text{ημ}^2 x}$

ε) κανένα από τα προηγούμενα.

20. Εάν S(t) είναι η θέση ενός κινητού τη χρονική στιγμή t, που κινείται ευθύγραμμα, τότε η τιμή $\frac{S(t_0+h)-S(t_0)}{h}$, $h\in R$, $h\neq 0$ εκφράζει:

α) τη στιγμιαία ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή $t = t_0$

β) τη μέση ταχύτητα του κινητού στο χρονικό διάστημα $[t_0, t_0 + h]$

γ) τη μέση τιμή της επιτάχυνσης στο χρονικό διάστημα $[t_0, t_0 + h]$

δ) τη διαφορά του διαστήματος που διήνυσε το κινητό από τη χρονική στιγμή t_0 μέχρι τη χρονική στιγμή $t_0 + h$

ε) κανένα από τα παραπάνω.

21. Η απόσταση ενός κινητού από ένα σημείο αναφοράς δίνεται από τον τύπο: $s(t) = 3t^2 + 2t + 1$. Η ταχύτητά του τη χρονική στιγμή t = 2sec θα είναι:

α) 12m/sec β) 3m/sec γ) 14m/sec δ) 3t m/sec

ε) κανένα από τα παραπάνω

22. Η απόσταση ενός κινητού από ένα σημείο αναφοράς δίνεται από τον τύπο: $s(t) = 4t^3 + t$. Η επιτάχυνσή του τη χρονική στιγμή t = 1sec θα είναι:

α) $12m/sec^2$ β) $24m/sec^2$ γ) $-24m/sec^2$ δ) $5\ m/sec^2$

ε) κανένα από τα παραπάνω

23. Εάν S(t) είναι η θέση ενός κινητού τη χρονική στιγμή t, που κινείται ευθύγραμμα, τότε η τιμή $\lim_{h\to 0}\frac{S(t_0+h)-S(t_0)}{h}$, $h\in R$, $h\neq 0$ εκφράζει:

α) τη στιγμιαία ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή $t = t_0$

β) τη μέση ταχύτητα του κινητού στο χρονικό διάστημα $[t_0, t_0 + h]$

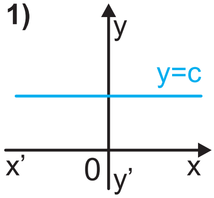
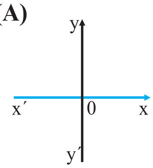
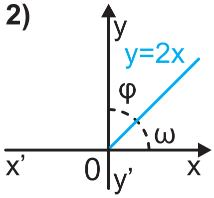
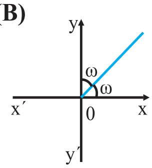
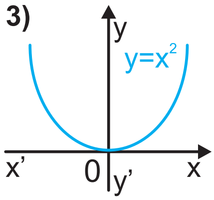
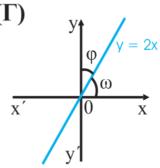
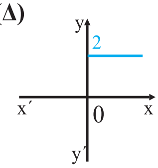
γ) τη μέση τιμή της επιτάχυνσης στο χρονικό διάστημα $[t_0, t_0 + h]$

δ) τη στιγμιαία τιμή της επιτάχυνσης τη χρονική στιγμή $t = t_0$

ε) κανένα από τα προηγούμενα.

Ασκήσεις Αντιστοίχισης

1. **Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των στηλών στον παρακάτω πίνακα.**

Στήλη Α (γράφική παράσταση της f)	Στήλη Β (γράφική παράσταση της f ΄)
1) 	(Α) 
2) 	(Β) 
3) 	(Γ) 
	(Δ) 

2. **Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των στηλών στον παρακάτω πίνακα.**

Στήλη Α (συνάρτηση f)	Στήλη Β (παράγωγοι f ΄)
α) $f(x) = 3x^2$	**1)** $f'(x) = 6x^2 - 1$
β) $f(x) = 3x$	**2)** $f'(x) = 6x$
γ) $f(x) = 2(x^2 - 1)$	**3)** $f'(x) = 3$
δ) $f(x) = (3x)^2$	**4)** $f'(x) = 3x - 1$
ε) $f(x) = (3x - 1)^2$	**5)** $f'(x) = 4x$
στ) $f(x) = 3x^2 - x$	**6)** $f'(x) = 6(3x - 1)$
	7) $f'(x) = 18x$
	8) $f'(x) = 6x^2$
	9) $f'(x) = 6x - 1$

3. **Να αντιστοιχίσετε τις συναρτήσεις της στήλης Α με την κατάλληλη σχέση από τη στήλη Β**

Στήλη Α	Στήλη Β
α) $f(x) = ημx$ **β)** $f(x) = e^x$ **γ)** $f(x) = 3x^2 + 2x - 3$ **δ)** $f(x) = e^{-x}$	**1)** $f'(x) = f(x)$ **2)** $f''(x) = - f(x)$ **3)** $f'(x) = - f(x)$ **4)** $f'''(x) = 0$ **5)** $f'''(x) = c,\ c \in R^*$ **6)** $f'(x) = 0$

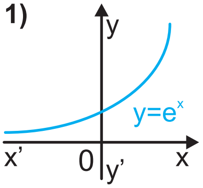
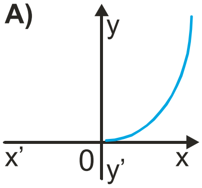
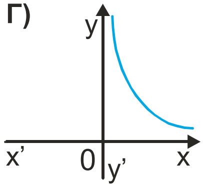
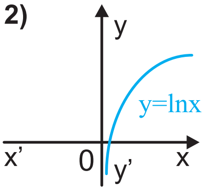
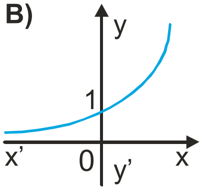
4. **Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των στηλών στον παρακάτω πίνακα.**

Στήλη Α	Στήλη Β
α) $f(x) = α$ **β)** $f(x) = αx$ **γ)** $f(x) = αx^2 + β$ **δ)** $f(x) = βx + α$ **ε)** $f(x) = βx^2$ **στ)** $f(x) = αx^2 - βx$ **ζ)** $f(x) = βx^2 + αx - γ$	**1)** $f'(x) = 0$ **2)** $f'(x) = α$ **3)** $f'(x) = αx + β$ **4)** $f'(x) = β$ **5)** $f'(x) = 2αx$ **6)** $f'(x) = 2βx$ **7)** $f'(x) = 2βx + γ$ **8)** $f'(x) = 2αx - β$ **9)** $f'(x) = 2αx + β$ **10)** $f'(x)= 2βx + α$ **11)** $f'(x)= 2α + βx$

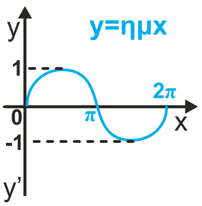
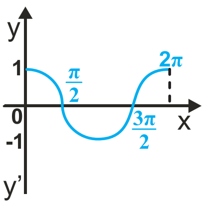
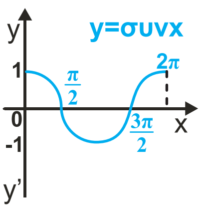
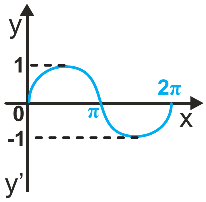
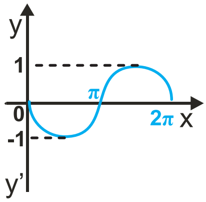
5. **Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των στηλών στον παρακάτω πίνακα ώστε να προκύψουν οι κανόνες παραγώγισης.**

Στήλη Α	Στήλη Β	
α) $(cf(x))'$ **β)** $(f(x) + g(x))'$ **γ)** $(f(x)g(x))'$ **δ)** $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'$ **ε)** $(f(g(x)))'$	**1)** $f'(x)g'(x)$ **2)** $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ **3)** $cf'(x)$ **4)** $f'(x)g(x) - f(x)g'(x)$ **5)** $f'(x) + g'(x)$ **6)** $f'(g(x))g'(f(x))$ **7)** $\dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$	**8)** $f'(g(x))g'(x)$ **9)** $\dfrac{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ **10)** $\dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x^2)}$

6. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των στηλών στον παρακάτω πίνακα.

Στήλη Α (γραφική παράσταση της f)	Στήλη Β (γραφική παράσταση της f ΄)
1) 	Α) 
	Γ) 
2) 	Β) 

7. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των στηλών στον παρακάτω πίνακα.

Στήλη Α (γραφική παράσταση της f)	Στήλη Β (γραφική παράσταση της f ΄)
1) 	Α) 
2) 	Β) 
	Γ) 

Ασκήσεις

1. Να βρεθούν οι παράγωγοι των παρακάτω συναρτήσεων:

1. $f(x) = x$ 2. $f(x) = 5{,}8$ 3. $f(x) = x^6$ 4. $f(x) = x^{16}$ 5. $f(x) = x^{-3}$
6. $f(x) = x^{-8}$ 7. $f(x) = 1/x^5$ 8. $f(x) = 1/x^{10}$ 9. $f(x) = 1/x^{-12}$

2. Να βρεθούν οι παράγωγοι των παρακάτω συναρτήσεων:

1. $f(x) = x^{1/4}$ 2. $f(x) = x^{1/8}$ 3. $f(x) = \sqrt[5]{x}$ 4. $f(x) = \sqrt[10]{x}$ 5. $f(x) = x^{3/5}$
6. $f(x) = x^{16/9}$ 7. $f(x) = \sqrt[6]{x^7}$ 8. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ 9. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

3. Να βρεθούν οι παράγωγοι των παρακάτω συναρτήσεων:

1. $f(x) = x^2 + x + 1$ 2. $f(x) = x^5 - x^3 + x$ 3. $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$
4. $f(x) = 5x + 3 - 2/x$ 5. $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$ 6. $f(x) = \sqrt{x} + συνx$
7. $f(x) = \ln x(x - 2)\sqrt{x} + e^x$ 8. $f(x) = 3x^4 + 1/x^2$ 9. $f(x) = x^5(x^2 + 1)$

4. Να βρεθούν οι παράγωγοι των παρακάτω συναρτήσεων:

1. $f(x) = x^4(x^2 + 2)(x + 2)$ 2. $f(x) = 2x^3 + 3ημx$ 3. $f(x) = 2ημx + 3συνx$
4. $f(x) = 5\ln x + 3e^x$ 5. $f(x) = 2ημx + e^x + 2$ 6. $f(x) = \ln xημx$
7. $f(x) = 4xημx$ 8. $f(x) = e^xσυνx$ 9. $f(x) = \sqrt{x}\ln x$

5. Να βρεθούν οι παράγωγοι των παρακάτω συναρτήσεων:

1. $f(x) = \sqrt[3]{x}e^x$ 2. $f(x) = 2xe^x\ln x$ 3. $f(x) = \dfrac{ημx}{e^x}$
4. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ 5. $f(x) = σφx$ 6. $f(x) = \dfrac{x^3}{\ln x}$
7. $f(x) = (2x^2 + x - 3)e^x$ 8. $f(x) = (ημx + συνx)e^x$ 9. $f(x) = (\ln x + 3x)ημx$

6. Να βρεθούν οι παράγωγοι των παρακάτω συναρτήσεων:

1. $f(x) = 2ημxσυνx$ 2. $f(x) = \sqrt{x}(\ln x + e^x)$ 3. $f(x) = (x + 1)\ln x$
4. $f(x) = \dfrac{2ημx - 3e^x}{ημx}$ 5. $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 1}{ημx + συνx}$ 6. $f(x) = \dfrac{εφx + 3}{e^x}$
7. $f(x) = \dfrac{2x\ln x}{x^2 + 1}$ 8. $f(x) = \dfrac{3xημx}{e^x}$ 9. $f(x) = \dfrac{\ln x + 3x^2 - 2x}{e^x}$

7. Να βρεθούν οι παράγωγοι των παρακάτω συναρτήσεων:

1. $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x - 8}{\sqrt[3]{x}}$
2. $f(x) = \dfrac{\sqrt[5]{x} + \sqrt[3]{x}}{e^x}$
3. $f(x) = \dfrac{\sqrt[6]{x}\ln x}{x^2 + 1}$
4. $f(x) = \dfrac{e^x\left(\dfrac{1}{x}\right)}{ημx}$
5. $f(x) = \dfrac{x^6 ημx + x^3 συνx}{\ln x}$
6. $f(x) = \dfrac{x^{-2}\ln x - x^{-1}e^x}{ημx + συνx}$
7. $f(x) = (2x^2 + 1)^3$
8. $f(x) = (3x - 1)^5$
9. $f(x) = (ημx^2 - 3x)^4$

8. Να βρεθούν οι παράγωγοι των παρακάτω συναρτήσεων:

1. $f(x) = (x^2 + x + 1)^{-2}$
2. $f(x) = (ημx + συνx)^3$
3. $f(x) = \sqrt{x^2 + ημx}$
4. $f(x) = (\ln x + e^x)^{-5}$
5. $f(x) = \sqrt[3]{\ln x - 3x}$
6. $f(x) = \sqrt{εφx}$
7. $f(x) = \sqrt[5]{(x^3 + 2x)^2}$
8. $f(x) = \sqrt{(ημx + συνx)^3}$
9. $f(x) = \sqrt{e^x + \ln x}$

9. Να βρεθούν οι παράγωγοι των παρακάτω συναρτήσεων:

1. $f(x) = \sqrt[4]{xημx}$
2. $f(x) = \sqrt{2ημxσυνx}$
3. $f(x) = \sqrt[3]{e^x + 2ημx}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 3x}}$
5. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{ημx}}$
6. $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x + 1}}{\sqrt[3]{\ln x - 1}}$
7. $f(x) = \ln\left(\dfrac{εφx}{x^2 + 1}\right)$
8. $f(x) = e^{συν3x}$
9. $f(x) = ημ(συν2x)$

10. Να βρεθούν οι παράγωγοι των παρακάτω συναρτήσεων:

1. $f(x) = (2x^3 + 3x)^5$
2. $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x}$
3. $f(x) = ημ(e^{2x})$
4. $f(x) = 3e^{συν3x}$
5. $f(x) = \ln(3x^2 + 5)$
6. $f(x) = ημ(xημx) + συν(ημx^2)$
7. $f(x) = συν\left(\dfrac{ημx}{x}\right)$
8. $f(x) = \dfrac{συν(ημx)}{x}$
9. $f(x) = συν[ημ(2x^2+1)+ημ(συνx)]$

11. Να βρεθούν οι παράγωγοι των παρακάτω συναρτήσεων:

1. $f(x) = ημ(3x^2 + 2x + 1)$
2. $f(x) = ημ(x^3 + \ln x)$
3. $f(x) = συν(e^x + 2x)$
4. $f(x) = ημ(συν3x)$
5. $f(x) = εφ(ημx + συνx)$
6. $f(x) = ημ(συνx)$
7. $f(x) = e^{3x}$
8. $f(x) = e^{3ημx}$
9. $f(x) = e^{-εφx}$

12. Να βρεθούν οι παράγωγοι των παρακάτω συναρτήσεων:

1. $f(x)=e^{x^3+5x-1}$ 2. $f(x)=e^{1/x}$ 3. $f(x)=e^{\sqrt{x+1}}$

4. $f(x)=\ln(ημx+συνx)$ 5. $f(x)=\ln(e^x+3x-2)$ 6. $f(x)=\ln\sqrt{x}$ 7. $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+3x+2})$ 8. $f(x)=\ln^3x$ 9. $f(x)=\ln x^3$

13. Να βρεθούν οι παράγωγοι των παρακάτω συναρτήσεων:

1. $f(x)=\sqrt{\ln(x^2+3)}$ 2. $f(x)=ημ^3(5x^2+6x+3)$ 3. $f(x)=συν^2\ln x$

4. $f(x)=\dfrac{1}{ημ^4(4x)}$ 5. $f(x)=\sqrt{e^{3x+1}}$ 6. $f(x)=e^{ημx+συν2x}$

7. $f(x)=\ln^5x+\ln^3x+\ln x$ 8. $f(x)=\ln(ημ3x)$ 9. $f(x)=\ln\sqrt{3x+2}$

14. Να βρεθούν οι παράγωγοι των παρακάτω συναρτήσεων:

1. $f(x)=\ln\left(\dfrac{1}{ημx}\right)$ 2. $f(x)=εφ(ημ^2x+ημx^2)$ 3. $f(x)=\ln^2(ημ^2x)$

4. $f(x)=\ln^2συν^3x^4$ 5. $f(x)=\ln(ημ3x)^3$ 6. $f(x)=ημ(συν(\ln x))$

7. $f(x)=ημ(e^{3x+1})$ 8. $f(x)=e^{ημ(\ln x)}$ 9. $f(x)=(ημ^2x+συν^3x)^{-2}$

15. Να βρεθούν οι παράγωγοι των παρακάτω συναρτήσεων:

1. $f(x)=ημ2xσυν3x$ 2. $f(x)=e^{x^2}\ln x^2$ 3. $f(x)=(3x^2+2)ημ^2x$

4. $f(x)=(\ln x+ημx)^2(e^x+συνx)^3$ 5. $f(x)=\dfrac{e^{3x+2}}{ημ(3x+2)}$ 6. $f(x)=\dfrac{\ln(x^3+3x-2)}{\ln(ημx)}$

7. $f(x)=\dfrac{ημ2xσυν3x}{εφ4x}$ 8. $f(x)=\dfrac{e^{ημx+συνx}}{\ln(ημ^2x)}$ 9. $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{\ln3x+2}{e^x}}$

10. $f(x)=\sqrt[3]{\left(\dfrac{ημ(\ln x)+συν(\ln x)}{xe^x}\right)^2}$

16. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x)=\dfrac{συνx}{e^x}$, και $g(x)=e^xσυνx$. Να βρείτε:

α) Τις πρώτες παραγώγους των f και g. β) Τις παραγώγους $f'(0)$ και $g'(0)$.

17. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=(5x+2)\sqrt{(5x-2)^3}$. Να βρείτε: την $f'(x)$ και το $f'(1)$.

18. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και την $f'(x)$.

19. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\dfrac{1}{e^x+1}$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και τις $f'(x)$, $f''(x)$.

20. Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=xe^{2x}$. Δείξτε ότι $f'(1/2)=2e$.

21. Να βρείτε πολυώνυμο P(x) τρίτου βαθμού, τέτοιο ώστε:
$P(0)=-3$, $P'(2)=1$, $P'(1)=2$, $P''(0)=5$.

22. Βρείτε ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού τέτοιο ώστε: $f(2)=4$, $f'(1)=3$ και $f''(1)=2$.

23. Έστω οι συναρτήσεις f, g με $g(x)=(x^3+1)\,f(x)+2x$. Αν $f'(0)=0$ να βρείτε την $g'(0)$.

24. Εστω η συνάρτηση f με $f(x)=\sqrt{3x-3}$. Υπολογίστε τις εκφράσεις $f(4)+(x-8)f'(4)$ και $f(13)+(x-1)f'(13)$ συναρτήσει της μεταβλητής x.

25. Να βρεθούν το πεδίο ορισμού και η πρώτη παράγωγος των συναρτήσεων f, g με:

$$f(x)=\frac{x^3-1}{\sqrt{x^3+1}},\quad g(x)=\frac{\ln(x^2+3)}{x^2+3}$$

26. Εστω η συνάρτηση f με $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και την $f'(-1)$.

27. Εστω ρόμβος που έχει τη μεγάλη διαγώνιο τετραπλάσια από τη μικρή. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού συναρτήσει της μικρής διαγωνίου δ όταν $\delta=3$.

28. Εστω ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με περίμετρο ίση με 50cm. Να εκφράσετε το εμβαδό του ορθογωνίου συναρτήσει της διαγωνίου του δ και να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού όταν $\delta=21$cm.

29. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της επιφάνειας ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με ακμές: α, $\beta=2\alpha$, $\gamma=\alpha+3\beta-1$ συναρτήσει του β όταν $\beta=1$.

30. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της επιφάνειας και του όγκου ενός κυλίνδρου με: $r=h^2-3$ ως προς h όταν $h=4$.

31. Να βρεθεί ο ρυθμός αύξησης του εμβαδού ενός ισοσκελούς τριγώνου με βάση ίση με το μισό των ίσων πλευρών όταν η βάση είναι ίση με 5cm.

32. Έστω ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο διαμέτρου δ. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου συναρτήσει του δ όταν δ = 6cm.

33. Ένα σώμα κινείται με αρχική ταχύτητα $υ_0$ και σταθερή επιτάχυνση α. Αν η εξίσωση του διαστήματος είναι $S(t) = υ_0 t + αt^2/2$, ποια είναι η ταχύτητα κάθε χρονική στιγμή t;

34. Η απόσταση ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα από ένα σημείο αναφοράς δίνεται από τον τύπο: $s(t) = 4t^2 + 5t + 3$.
ι) Να βρείτε την εξίσωση της ταχύτητας συναρτήσει του t.
ιι) Να βρείτε την ταχύτητά του τη χρονική στιγμή t = 3sec.

35. Η θέση ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα, δίνεται συναρτήσει του χρόνου από τον τύπο $s(t) = 2t + (t + 3)^2$, όπου το t μετριέται σε sec και το s σε μέτρα. Να βρείτε:
α) τη μέση ταχύτητα του κινητού στο χρονικό διάστημα [0, 4] sec
β) τη στιγμιαία ταχύτητα του κινητού, όταν t = 1 sec.

36. Η θέση ενός κινητού, που εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση, δίνεται συναρτήσει του χρόνου t (σε sec) από τον τύπο $s(t) = 3t^2 – t + 3$. Να βρείτε:
α) τη μέση ταχύτητα του κινητού στο χρονικό διάστημα [1, 7] sec
β) τη στιγμιαία ταχύτητα του κινητού, όταν t = 4 sec.

37. Η ταχύτητα, ενός κινητού, που κινείται ευθύγραμμα, συναρτήσει του χρόνου t (σε sec), δίνεται από τον τύπο $υ(t) = 2t^2 - 1$.
α) Να εκφράσετε το ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας του κινητού ως προς t, όταν $t = t_0$.
β) Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας του κινητού ως προς t, 10 sec μετά την εκκίνησή του.

38. Μια σφαίρα αυξάνει τον όγκο της με ρυθμό 300π cm^3/sec. Να βρεθεί ο η ακτίνα r και η επιφάνεια της σφαίρας όταν ο ρυθμός μεταβολής της ακτίνας γίνει ίσος με 9cm/sec.

39. Το μήκος x ενός ορθογωνίου αυξάνει με ρυθμό 2cm/sec. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του πλάτους y ως προς χρόνο t αν τη χρονική στιγμή που x = 10cm και y = 15cm ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού είναι 100cm^2/sec.

40. Ενας κύλινδρος με σταθερό ύψος h = 6cm έχει ακτίνα βάσης που αυξάνεται σύμφωνα με τον τύπο $r(t) = t^2 + 1$ όπου t ο χρόνος σε sec. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του όγκου και της επιφάνειας του κυλίνδρου τη χρονική στιγμή t = 2sec.

41. Ο όγκος μιας σφαίρας (σε mm^3) συναρτήσει του χρόνου t (σε min) δίνεται κατά προσέγγιση από τον τύπο $V(t) = 10^5 - 10^2(2 + 3t)^{-1}$.
α) Να βρείτε τον αρχικό όγκο (t = 0). β) Να βρείτε τον όγκο μετά από 6 min.
γ) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του όγκου ως προς το χρόνο, όταν t = 1min.

42. Η περιεκτικότητα ενός διαλύματος σε μια ουσία συναρτήσει του χρόνου t (σε ώρες) δίνεται κατά προσέγγιση από τον τύπο $f(t) = 0{,}5 \cdot e^{0{,}2t}$ (σε mgr). Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της περιεκτικότητας, ως προς το χρόνο, ύστερα από 2 ημέρες.

43. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x - 12$, $x \in R$. Εξετάστε αν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης στα οποία η εφαπτόμενη είναι παράλληλη στον άξονα xx΄.

44. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 - 5x + 6$, $x \in R$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, που είναι παράλληλη στην ευθεία y = x +3.

45. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = (2x + 1)^2$, $x \in R$. Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης λ της εφαπτομένης της καμπύλης της f
α) στο σημείο με τετμημένη 2. β) στο σημείο με τεταγμένη 2.

46. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 + 3x - 1$, $x \in R$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f, που σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία 135°.

47. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \alpha(x + 1)^2$, $x \in R$, $\alpha \in R$.
α) Να προσδιορίσετε τον α, η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α(1,4) και Β(5,8) να εφάπτεται στην γραφική παράσταση της f στο σημείο (1, f(1)).
β) Να βρείτε την εξίσωση της παραπάνω εφαπτομένης ευθείας.

48. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 + 4x - 6$, $x \in R$. Να προσδιορίσετε το σημείο Α της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, στο οποίο:
α) η εφαπτομένη της σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα x΄x.
β) η εφαπτόμενη είναι παράλληλη με την ευθεία y = 2x + 7.

49. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 - \alpha x + \beta$, $\alpha, \beta \in R$. Να υπολογίσετε τα α, β ώστε:
α) η ευθεία y = 2x + 3 να είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη 2.
β) η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης στο σημείο Α(1,4) να είναι παράλληλη στην ευθεία 2y = x – 3.

50. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 6x + 3}{3}$, $x \in R$. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f, που είναι παράλληλες στην ευθεία y = x + 3.

51. **Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\frac{1}{x^3}$, $x\in R$, $x\neq 0$. Να δείξετε ότι $f'(\alpha)=-\frac{3}{\alpha^4}$ για κάθε $\alpha\in R$, $\alpha\neq 0$ και να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που εφάπτεται στο σημείο με τετμημένη α της γραφικής παράστασης της f.**

52. **Εστω η συνάρτηση f με $f(x)=2x^2+x+3$ $x\in R$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτό-μενης της γραφικής παράστασης της f στο Μ(0,3).** (Πανελλήνιες 1985 Δ΄Δέσμη)

53. **Εστω η συνάρτηση f με $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+7x-1$ $x\in R$. Αν C είναι η γραφική παράσταση της f να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f στο σημείο (1, 23/6). Στη συνέχεια να βρείτε σε ποιό σημείο αυτή τέμνει τον άξονα xx΄.** (Πανελλήνιες 1985 Δ΄Δέσμη)

54. **Εστω η συνάρτηση f με $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+9x-12$ και C_f η γραφική της παράσταση. Να προσδιορίσετε τα $\alpha,\beta\in R$ ώστε το σημείο Μ(2,-10) να ανήκει στο C_f και η εφαπτόμενη στο Μ να έχει κλίση - 3.** (Πανελλήνιες 1987 Δ΄Δέσμη)

55. **Εστω η συνάρτηση f με f(x) = ημ(2x + π/2) και πεδίο ορισμού το διάστημα [-π/4,π/4]. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτόμενης της γραφικής παράστασης της f στο x_0= π/8.** (Πανελλήνιες 1989 Α΄Δέσμη)

56. **Να βρεθεί ο πραγματικός α ώστε η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με $f(x)=\frac{x^3+x}{x+\alpha}$ στο σημείο (-1,f(-1)) να είναι:**

α) παράλληλη στον άξονα xx΄. **β) παράλληλη στην ευθεία y = x.**

57. **Να προσδιορίσετε τον αριθμό $\alpha\in R$ ώστε η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\frac{\alpha e^x+e^{-x}}{e^x+1}$ να έχει εφαπτομένη στο σημείο $x_0=\ln 3$ κάθετη στην ευθεία $y=-3x+3$.**

58. **Να βρεθούν τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με $f(x)=\frac{x^2-1}{x}$ στα οποία ο συντελεστής διευθύνσεως της εφαπτομένης είναι 17.**

59. **Εστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^2-5x+6$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτόμενης στο σημείο $x_o=1$.**

60. **Εστω η συνάρτηση f με $f(x)=\frac{x-1}{x+2}$ και C_f η γραφική της παράσταση. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f με συντελεστή διεύθυνσης 1/3.**

61. Δείξτε ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με f(x) = συνx στα σημεία $x_1 = \frac{\pi}{2}$ και $x_2 = \frac{3\pi}{2}$ είναι κάθετες.

62. Να βρεθούν τα α,β∈ R ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με $f(x) = \alpha x^2 - \frac{\beta}{x}$ να έχει εφαπτόμενη την y – 2x + 3 = 0 στο σημείο $x_0 = 2$.

63. Δείξτε ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με f(x) = x – 1/x στα σημεία $x_1 = 1$ και $x_2 = -1$ είναι παράλληλες.

64. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$, και τα σημεία Α(α, f(α)) και Β(β, f(β)) α, β∈ R. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της f στο σημείο $M\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)$ είναι παράλληλη στην ευθεία ΑΒ.

65. Εστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 - \alpha x + \beta$. Να βρεθούν τα α, β∈ R ώστε η ευθεία y = 2x + 1 να εφάπτεται στο σημείο (1,2) της γραφ. παράστασης της f.

66. Δίνεται η συνάρτηση f με f(x) = ln(x – 3). Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $x_0 = (e + 3)$.

67. Εστω η συνάρτηση f με $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f στα σημεία $x_1 = 1$ και $x_2 = 3$ και να δείξετε ότι αυτές είναι παράλληλες.

68. Δίνεται η f με $f(x) = \frac{2x-3}{x}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της γραφικής παράστασης της C_f της f. Κατόπιν να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου στο οποίο η εφαπτόμενη περνά από το σημείο (1,1).

69. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = x^3 + 3x^2 + 12$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτόμενης της γραφικής παράστασης της f που είναι κάθετη στην ευθεία 3y = x + 1.

70. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 + e^x$ και C_f η γραφική της παράσταση. Έστω επίσης η εφαπτόμενη της C_f στο Α(0,1). Βρείτε την εξίσωση της ευθείας:
ι) που περνά από το Α και είναι κάθετη στην εφαπτόμενη.
ιι) που περνά από το Β(4,4) και είναι παράλληλη στην εφαπτόμενη.

71. Να βρεθούν τα α,β,γ ώστε η γραφική παράσταση της $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ να τέμνει τον yy΄ στο 3, να περνάει από το Β(-1,8) και η εφαπτόμενη στο Β να έχει κλίση -6.

72. **Εστω η συνάρτηση f με $f(x) = αημ2x$ με $α \neq 0$ και C_f η γραφική της παράσταση. Να βρεθεί ο α ώστε η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $x_0 = 0$ να σχηματίζει θετική γωνία 30° με τον άξονα yy΄.**

73. **Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με $f(x) = -3x^2 + 3x - 9$ στο σημείο (1/3,f(1/3)) και να βρεθεί η εξίσωση της κάθετης προς την εφαπτόμενη ευθείας στο σημείο αυτό.**

74. **Εστω η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 - 5x + 3$ και C_f η γραφική της παράσταση. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f στα σημεία $x_1 = 1$ και $x_2 = 4$.**

75. **Αν $f(x) = e^{αx} + e^{-αx}$ δείξτε ότι $f''(x) = α^2 f(x)$.**

76. **Αν $f(x) = xημ(\ln x)$ δείξτε ότι $xf''(x) + \dfrac{2f(x)}{x} = f'(x)$.**

77. **Εστω η συνάρτηση f με $f(x) = συν(e^x + α)$. Δείξτε ότι $f''(x) - e^x f'(x) + e^{2x} f(x) = 0$.**

78. **Εστω η συνάρτηση f με $f(x) = εφx$. Δείξτε ότι $f'''(x) = 2(1+εφ^2x)(1+3εφ^2x)$.**

79. **Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ημ^2(αx)$, $x \in R$, $α \in R$. Να βρείτε την τιμή του α ώστε να ισχύει $f''(x) + 4α^2 f(x) = 2$.** (Πανελλήνιες 1999 Δ΄Δέσμη)

80. **Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 2x - x^2$. Δείξτε ότι: $(1 - x) f''(x) + f'(x) = 0$, για κάθε $x \in R$.**

81. **Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = e^{αx}$.**

α) Να δείξετε ότι: $αf'(x) - f''(x) = 0$, για κάθε $x \in R$.

β) Να βρείτε τις τιμές του α, ώστε να ισχύει η σχέση $f''(x) + 2f'(x) = 3f(x)$, για κάθε $x \in R$.

82. **Αν $f(x) = xημx$ δείξτε ότι $x^2 f''(x) - 2xf'(x) + (x^2 + 2)f(x) = 0$**

83. **Αν $f(x) = e^{2x}ημ2x$ δείξτε ότι $f''(x) - 4f'(x) + 8f(x) = 0$.**

84. **Εστω η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{5x^2 + 3}$. Δείξτε ότι $f(x)f''(x) + [f'(x)]^2 = 5$.**

85. **Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = e^{-3x}$. Υπολογίστε την έκφραση $f(0) + 3x^3 f'(0)$.**

86. Αν $f(x)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x}{x}$, $x\neq 0$ δείξτε ότι $f'(x)=f(x)-\dfrac{2f'(x)}{x}$.

87. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = e^x\eta\mu 2x$. Δείξτε ότι $f''(x) - 2f'(x) + 5f(x) = 0$.

88. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{x} - x$, $x > 0$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης $4x\,f''(x)[x + f(x)] + 1 = 0$.

89. Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις f με $f(x)=\dfrac{\alpha}{6}x^3+\dfrac{\beta}{2}x^2+\gamma x+\delta$ και g με:

$$g(x)=\frac{f'''(0)}{6}x^3+\frac{f''(0)}{2}x^2+f'(0)x+f(0)$$ είναι ίσες.

90. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = (x^2 + x - 3)\,\varphi(x)$ όπου φ συνάρτηση για την οποία ισχύουν $\varphi(0) = 0$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varphi(x)}{h}=1$. Να βρεθεί η $f'(0)$.

91. Εστω οι συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες σε ένα ανοικτό διάστημα (- α,α) για τις οποίες ισχύουν $f'(x) = g(x)$ και $g'(x) = -f(x)$. Δείξτε ότι $f^2(x) + g^2(x) = c$.

92. Βρείτε τα α, $\beta\in R$ για τη συνάρτηση f με $f(x)=\alpha x^2+\dfrac{\beta}{x}$ αν το σημείο Α(1,2) ανήκει στη γραφική παράσταση της f και $f''(2) = 5$.

93. Δίνεται η συνάρτηση f με τις ιδιότητες:
α) $f(0) = 1$ β) υπάρχει η $f'(0)$ γ) $f(x + y) = f(x)\,f(y)$
για κάθε $x, y\in R$. Να δείξετε ότι για κάθε $t\in R$ ισχύει $f'(t) = f(t)\,f'(0)$.

1.4 Εφαρμογές των Παραγώγων.

Απαραίτητες γνώσεις Θεωρίας

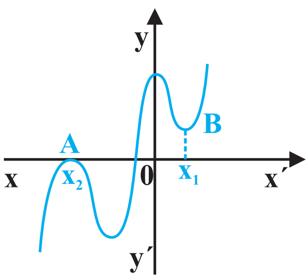
Θεωρία 1.

α) Τι ονομάζουμε γνησίως αύξουσα και τι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση;
β) Τι λέμε τοπικό και τι ολικό ακρότατο;

Απάντηση:

α) Μια συνάρτηση $f: A \to R$ ονομάζεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού Α της f αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει ότι: $f(x_1) < f(x_2)$. Αντίστοιχα:
Μια συνάρτηση $f: A \to R$ ονομάζεται **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού Α της f αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει ότι: $f(x_1) > f(x_2)$.
Και στις δυο παραπάνω περιπτώσεις λέμε ότι η συνάρτηση f είναι **γνησίως μονότονη.** Σε περίπτωση που δεν ισχύει γνήσια ανισότητα λέμε αντίστοιχα ότι η συνάρτηση f είναι **μονότονη** (αύξουσα ή φθίνουσα).

β) Μια συνάρτηση $f : A \to R$ παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στο $x_0 \in A$ αν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε x που ανήκει σε μια περιοχή του x_0. Αντίστοιχα:
Μια συνάρτηση $f : A \to R$ παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στο $x_0 \in A$ αν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε x που ανήκει σε μια περιοχή του x_0.
Και στις δυο παραπάνω περιπτώσεις λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο $x_0 \in A$. Αν οι παραπάνω ορισμοί ισχύουν για κάθε $x \in A$ τότε λέμε ότι η συνάρτηση f **παρουσιάζει ολικό ακρότατο** (μέγιστο ή ελάχιστο) στο $x_0 \in A$.



Παρατηρήσεις:

α) Μια συνάρτηση μπορεί να έχει και ολικά και τοπικά ακρότατα.

β) Ενα τοπικό ελάχιστο μπορεί να είναι μεγαλύτερο από ένα τοπικό μέγιστο όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα ($f(x_2) < f(x_1)$).

Θεωρία 2.

α) Πως προσδιορίζουμε τη μονοτονία μιας συνάρτησης με τη βοήθεια της παραγώγου;
β) Πως βρίσκουμε τα ακρότατα με τη βοήθεια της παραγώγου;
γ) Ποιο είναι το κριτήριο της δευτέρας παραγώγου;

Απάντηση:

α) Για να προσδιορίσουμε τη μονοτονία μιας συνάρτησης χρησιμοποιούμε το ακόλουθο κριτήριο:

- Αν μια συνάρτηση $f: A \to R$ είναι παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της και είναι $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα και συμβολίζουμε $f\uparrow$.
- Αν μια συνάρτηση $f: A \to R$ είναι παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της και είναι $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα και συμβολίζουμε $f\downarrow$.

Άρα το πρόσημο της f΄ φανερώνει τη μονοτονία της f.

Παρατήρηση:
Ισχύουν και τα αντίστροφα των παραπάνω προτάσεων.

β) Ισχύει ότι: αν f παραγωγίσιμη και το $f(x_0)$ είναι ακρότατο τότε $f'(x_0) = 0$.

ΠΡΟΣΟΧΗ! Το αντίστροφο δεν ισχύει.

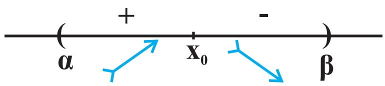
Αν $f'(x_0) = 0$ τότε το $f(x_0)$ είναι **πιθανό ακρότατο**.

Για να βεβαιωθούμε αν πράγματι είναι ακρότατο πρέπει να εξετάσουμε τη μονοτονία της συνάρτησης δεξιά και αριστερά του.

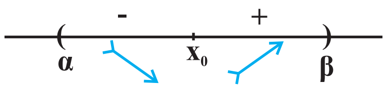
Ισχύει το ακόλουθο κριτήριο:

Εστω συνάρτηση $f: A \to R$ και $x_0 \in (\alpha, \beta) \subseteq A$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$. Αν η μονοτονία της f μεταβάλλεται δεξιά και αριστερά του x_0, τότε το $f(x_0)$ είναι ακρότατο και συγκεκριμένα:

- Αν $\left.\begin{array}{l} f'(x) > 0 \text{ για } x \in (\alpha, x_0) \\ f'(x) < 0 \text{ για } x \in (x_0, \beta) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x_0)$ μέγιστο



- Αν $\left.\begin{array}{l} f'(x) < 0 \text{ για } x \in (\alpha, x_0) \\ f'(x) > 0 \text{ για } x \in (x_0, \beta) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x_0)$ ελάχιστο



γ) Το κριτήριο της δεύτερης παραγώγου είναι το εξής:

- Αν έχουμε $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) > 0$ τότε το $f(x_0)$ είναι ελάχιστο
- Αν έχουμε $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) < 0$ τότε το $f(x_0)$ είναι μέγιστο
- Αν έχουμε $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) = 0$ τότε δεν μπορούμε να αποφανθούμε και χρησιμοποιούμε το κριτήριο της πρώτης παραγώγου - μονοτονίας.

Θεωρία 3.

Ποια βήματα ακολουθούμε για την εύρεση της μονοτονίας και των ακροτάτων μιας συνάρτησης με τη βοήθεια της παραγώγου;

Απάντηση:

Α΄ τρόπος:

Βήμα 1: Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού.

Βήμα 2: Βρίσκουμε την $f'(x)$.

Βήμα 3: Λύνουμε την εξίσωση $f'(x) = 0$. Οι ρίζες της εξίσωσης, αν υπάρχουν, είναι πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων.

Βήμα 4: Κατασκευάζουμε πίνακα προσήμων για να διαπιστώσουμε τη μονοτονία και την ύπαρξη ακροτάτων. Ο πίνακας γίνεται ως εξης:

- Στην πρώτη γραμμή τοποθετούμε τα άκρα του πεδίου ορισμού και τις πιθανές θέσεις ακροτάτων.
- Στην δεύτερη γραμμή τοποθετούμε το πρόσημο της f'.
- Στην τρίτη γραμμή σημειώνουμε τη μονοτονία της f και διαπιστώνουμε αν υπάρχουν ακρότατα.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$	←Πιθ. θέσεις ακροτάτων
$f'(x)$		+	ο	−	ο	+		← Πρόσημο
f(x)		↗		↘		↗		← Εύρεση μονοτονίας

Τ.Μ. $f(x_1)$ Τ.Ε. $f(x_2)$

Παράδειγμα:

Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = 3x^2 - 3x + 5$. Να βρεθεί η μονοτονία και τα ακρότατά της.

Λύση:

Βήμα 1:

Έχουμε $A_f = R$ ως πολυωνυμική.

Βήμα 2:

$f'(x) = (3x^2 - 3x + 5)' = 6x - 3$.

Βήμα 3:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 3 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1/2$ πιθανή θέση ακροτάτου.

Βήμα 4.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	ο	+	
f(x)		↘		↗	

Ο.Ε. $f(1/2) = 17/4$

Παρατήρηση: Ο Α΄ τρόπος μπορεί να γίνει ως εξής:
Βήμα 1: Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού.
Βήμα 2: Βρίσκουμε την $f'(x)$.
Βήμα 3: Λύνουμε την ανίσωση $f'(x) > 0$ ή $f'(x) < 0$. Η λύση της ανίσωσης φανερώνει τα διαστήματα μονοτονίας και έμμεσα τα ακρότατα.

Παράδειγμα:
Εστω η συνάρτηση f με $f(x) = 3x^2 - 3x + 5$. Να βρεθεί η μονοτονία και τα ακρότατά της.

Λύση:
Βήμα 1: Εχουμε $A_f = R$ ως πολυωνυμική.
Βήμα 2: $f'(x) = (3x^2 - 3x + 5)' = 6x - 3$.
Βήμα 3: $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 6x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 1/2$.
Άρα $f \uparrow$ στο $[1/2, +\infty)$ $f \downarrow$ στο $(-\infty, 1/2]$ και στο $f(1/2) = 17/4$, είναι ολικό ελάχιστο.

Β΄ τρόπος:
Βήμα 1: Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού.
Βήμα 2: Βρίσκουμε την $f'(x)$.
Βήμα 3: Λύνουμε την εξίσωση $f'(x) = 0$. Στις ρίζες της εξίσωσης, αν υπάρχουν, είναι τα πιθανά ακρότατα.
Βήμα 4: Εφαρμόζουμε το κριτήριο της δευτέρας παραγώγου και διαπιστώνουμε αν υπάρχουν ακρότατα.

Παράδειγμα:
Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = 3x^2 - 3x + 5$. Να βρεθούν τα ακρότατά της.

Λύση:

Βήμα 1: Εχουμε $A_f = R$ ως πολυωνυμική.

Βήμα 2: $f'(x) = (3x^2 - 3x + 5)' = 6x - 3$.

Βήμα 3: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1/2$ πιθανή θέση ακροτάτου.

Βήμα 4: $f''(x) = (6x - 3)' = 6 > 0$ για κάθε $x \in R$ οπότε και $f''(1/2) > 0$.

Παρατηρήσεις:
α) Οι παραπάνω μεθοδολογίες αναφέρονται σε συνεχείς συναρτήσεις.
β) Οι ρίζες της πρώτης παραγώγου δεν είναι οι μοναδικές θέσεις πιθανών ακροτάτων της f αλλά οι άλλες περιπτώσεις δεν συμπεριλαμβάνονται στον διδακτικό σκοπό της ενότητας αυτής.

Λυμένες Ασκήσεις

1. Να βρεθούν αν υπάρχουν τα ακρότατα των συναρτήσεων:

ι) $f(x) = x^3 - 12x^2 + 10$ **ιι)** $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6x - 1$ **ιιι)** $f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + x - 6$

Λύση:

ι) Εχουμε: $A_f = R$

$f'(x) = (x^3 - 12x^2 + 10)' = 3x^2 - 24x$

Άρα: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 24x = 0 \Leftrightarrow 3x(x-8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 8 \end{cases}$ πιθανά ακρότατα.

x	-∞	0		8		+∞
f΄(x)	+	0	-	0	+	
f(x)	↗		↘		↗	

T.M. f(0) = 10 T.E. f(8) = -246

ιι) Έχουμε: $A_f = R$

$f'(x) = (2x^3 + 3x^2 + 6x - 1)' = 6x^2 + 6x + 6$

Άρα: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6x + 6 = 0$, δεν έχει πραγματικές λύσεις, άρα δεν υπάρχουν ακρότατα.

ιιι) Έχουμε: $A_f = R$

$f'(x) = (\frac{x^3}{3} + x^2 + x - 6)' = x^2 + 2x + 1$

Άρα: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$, πιθανό ακρότατο.

x	-∞	1	+∞
f΄(x)	+	0	+
f(x)	↗		↗

Άρα δεν υπάρχουν ακρότατα.

2. Να βρείτε σε ποιό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τύπο: $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 6x + 12$, η εφαπτομένη έχει ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης.

Λύση:

Αν $M(x_0, f(x_0))$ το ζητούμενο σημείο, τότε $f'(x_0)$, είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης. Έχουμε:

$$f'(x) = (2x^3 + 3x^2 - 6x + 12)' = 6x^2 + 6x - 6 \text{ και } f''(x) = (6x^2 + 6x - 6)' = 12x + 6$$

Άρα: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$ πιθανή θέση ακροτάτου.

x	-∞	½	+∞
f΄΄(x)	+	0	+
f΄(x)	↘		↗

ελάχιστο το f(-1/2) = -15/2

Άρα στο σημείο: $\left(-\dfrac{1}{2}, f(-\dfrac{1}{2})\right) = \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{31}{2}\right)$ η εφαπτομένη έχει ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης.

3. Να βρείτε το σημείο της ευθείας ε: $y = x + 2$ που είναι "πλησιέστερο" στο σημείο A(1,1).

Λύση:

Έστω B(x, x+2) σημείο της ευθείας ε.

Τότε:

$$d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (x+2-1)^2} = \sqrt{x^2 - 2x + 1 + x^2 + 2x + 1} =$$
$$= \sqrt{2x^2 + 2}$$

Θεωρούμε την συνάρτηση: $f(x) = \sqrt{2x^2 + 2}$, $x \in R$

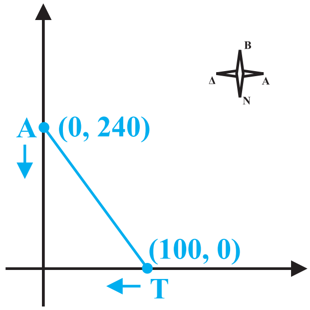
Τότε: $f'(x) = (\sqrt{2x^2+2})' = \dfrac{1}{2\sqrt{2x^2+2}}(2x^2+2)' = \dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+2}}$

Είναι: $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+2}} > 0 \Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$

Άρα από το σημείο (0,2) η απόσταση είναι ελάχιστη.

4. Ενα αυτοκίνητο βρίσκεται 240km βορείως ενός σιδηροδρομικού σταθμού και κινείται νότια με σταθερή ταχύτητα 80km/h. Την ίδια χρονική στιγμή ένα τρένο βρίσκεται 100km ανατολικά του σταθμού και κινείται δυτικά με σταθερή ταχύτητα 60km/h. Να βρεθεί η χρονική στιγμή κατά την οποία η απόσταση των κινητών γίνεται ελάχιστη καθώς και η ελάχιστη απόσταση.

Λύση:



Η απόσταση του αυτοκινήτου από το σιδηροδρομικό σταθμό μετά από χρόνο t θα είναι:
$S_A = 240 - 80t$ και του τρένου: $S_T = 100 - 60t$.
Η μεταξύ τους απόσταση δίνεται από τον τύπο:

$$S(t) = \sqrt{(240-80t)^2 + (100-60t)^2} =$$

$$= \sqrt{57600 + 6400t^2 - 38400t + 10000 + 3600t^2 - 12000t} =$$

$$= \sqrt{10000t^2 - 50400t + 67600} = 10\sqrt{100t^2 - 504t + 676}$$

Τότε:

$$S'(t) = (10\sqrt{100t^2 - 504t + 676})' = \frac{10}{2\sqrt{100t^2 - 504t + 676}}(100t^2 - 504t + 676)' =$$

$$= \frac{1000t - 2520}{\sqrt{100t^2 - 504t + 676}}$$

$S'(t) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1000t - 2520}{\sqrt{100t^2 - 504t + 676}} = 0 \Leftrightarrow 1000t - 2520 = 0 \Leftrightarrow t = 2{,}52$ πιθανό ακρότατο.

x	$-\infty$	2,52	$+\infty$
S΄(t)	-	0	+
S(t)	↘		↗

ελάχιστο το S(2,52) = 64

Άρα σε 2,52 ώρες τα κινητά θα απέχουν την ελάχιστη απόσταση, δηλαδή 64km.

5. Το κόστος (σε εκατοντάδες ευρώ) ημερήσιας παραγωγής x τεμαχίων ενός προϊόντος από ν εργάτες μιας βιοτεχνίας δίνεται από τον τύπο: $K(x) = x^3 - 3\nu x^2 + 5\nu^3$. Το κέρδος ανά τεμάχιο είναι 1600 – 100ν ευρώ. Βρείτε πόσα τεμάχια και από πόσους εργάτες πρέπει να παράγονται ημερησίως ώστε η βιοτεχνία να έχει ελάχιστο κόστος και μέγιστο κέρδος, συγχρόνως.

Λύση:

Έχουμε: $K'(x) = 3x^2 - 6\nu x$, όπου ν σταθερό για την συνάρτηση K(x).

$K'(x) > 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6\nu x > 0 \Leftrightarrow 3x(x - 2\nu) > 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x > 2\nu$

Άρα για x = 2ν τεμάχια ημερησίως έχουμε το ελάχιστο κόστος.

Το κέρδος από την παραγωγή 2ν μονάδων είναι:

$P(\nu) = 2\nu(1600 - 100\nu) = 3200\nu - 200\nu^2$. Άρα: $P'(\nu) = (3200\nu - 200\nu^2)' = 3200 - 400\nu$

$P'(\nu) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3200 - 400\nu > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nu < 8$

Άρα για ν = 8 εργάτες έχουμε το μέγιστο κέρδος.

Τελικά η βιοτεχνία έχει ελάχιστο κόστος και μέγιστο κέρδος όταν παράγονται ημερησίως 16 τεμάχια από 8 εργάτες.

6. Η συγκέντρωση ενός φαρμάκου στο σώμα ενός ασθενούς t ώρες μετά την λήψη του δίνεται από τον τύπο: $y(t)=\dfrac{A}{c_1-c_2}(e^{-c_1t}-e^{-c_2t})$, όπου A, c_1,c_2 θετικές σταθερές με $c_1>c_2$. Να βρεθεί η χρονική στιγμή που ο ασθενής έχει τη μέγιστη συγκέντρωση φαρμάκου στο αίμα του.

Λύση:

Έχουμε:

$$y'(t)=\frac{A}{c_1-c_2}(e^{-c_1t}-e^{-c_2t})'=\frac{A}{c_1-c_2}(e^{-c_1t}(-c_1t)'-e^{-c_2t}(-c_2t)')=\frac{A}{c_1-c_2}(-c_1e^{-c_1t}+c_2e^{-c_2t})$$

$$y'(t)>0\Leftrightarrow\frac{A}{c_1-c_2}(-c_1e^{-c_1t}+c_2e^{-c_2t})>0\Leftrightarrow -c_1e^{-c_1t}+c_2e^{-c_2t}>0\Leftrightarrow c_2e^{-c_2t}>c_1e^{-c_1t}\Leftrightarrow$$

$$\frac{c_2}{c_1}>e^{(c_2-c_1)t}\Leftrightarrow \ln\left(\frac{c_2}{c_1}\right)>\ln e^{(c_2-c_1)t}\Leftrightarrow \ln\left(\frac{c_2}{c_1}\right)>(c_2-c_1)t\Leftrightarrow\frac{\ln\left(\frac{c_2}{c_1}\right)}{c_2-c_1}<t$$

Άρα τη χρονική στιγμή: $t=\dfrac{\ln\left(\frac{c_2}{c_1}\right)}{c_2-c_1}$, έχουμε μέγιστη συγκέντρωση.

Ερωτήσεις Σωστό – Λάθος.

Χαρακτηρίστε σαν σωστές (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις και αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας. Στις περιπτώσεις λανθασμένων προτάσεων αναφέρατε ποιό είναι το λάθος και διορθώστε τις.

1. Εστω συνάρτηση f συνεχής και γνησίως αύξουσα σε διάστημα Δ τότε για κάθε εσωτερικό σημείο x_0 του Δ η εφαπτόμενη σχηματίζει οξεία γωνία με τον άξονα xx΄. ( )
2. Το πρόσημο της f΄΄ φανερώνει τη μονοτονία της f΄. ( )
3. Έστω συνάρτηση f συνεχής και $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του διαστήματος Δ, τότε f γνησίως αύξουσα στο Δ. ( )
4. Αν $0 < x_1 < x_2$ τότε: $\ln x_1 > \ln x_2$. ( )
5. Η συνάρτηση: $f(x) = x^2$ είναι γνησίως αύξουσα. ( )
6. Θέσεις πιθανών ακροτάτων συνάρτησης f ορισμένης και συνεχούς σ’ ένα διάστημα Δ είναι μόνο οι ρίζες της f΄(x). ( )
7. Αν μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σ’ ένα εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε $f'(x_0) = 0$. ( )
8. Αν για συνάρτηση f, ορισμένη και συνεχή σ’ ένα διάστημα Δ, υπάρχει η $f'(x_0)$ και είναι: $f'(x_0) = 0$, με x_0 εσωτερικό σημείο του Δ, τότε το x_0 είναι θέση τοπικού ακρότατου της f. ( )
9. Έστω συνάρτηση f, ορισμένη και συνεχής σ’ ένα διάστημα Δ. Τα εσωτερικά σημεία του Δ, στα οποία η f παραγωγίζεται και η παράγωγος ισούται με μηδέν, είναι θέσεις πιθανών τοπικών ακροτάτων της. ( )
10. Έστω συνάρτηση f, ορισμένη και συνεχής σ’ ένα διάστημα Δ. Τα εσωτερικά σημεία x του Δ, στα οποία η f παραγωγίζεται και η παράγωγος f΄(x) ισούται με μηδέν, αποτελούν πάντοτε θέσεις τοπικών ακροτάτων της. ( )
11. Οι εφαπτόμενες της γραφ. παράστασης μιας συνάρτησης f στα σημεία που είναι λύσεις της εξίσωσης $f'(x) = 0$ είναι παράλληλες στον άξονα x΄x. ( )
12. Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη και ορίζεται στο R τότε δεν έχει ακρότατα. ( )
13. Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη και ορίζεται στο R τότε τέμνει τον άξονα xx΄ σε μοναδικό σημείο. ( )
14. Ενα τοπικό ελάχιστο μπορεί να είναι μεγαλύτερο από ένα τοπικό μέγιστο. ( )

15. Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3$ ορισμένη στο R δεν έχει ακρότατα. ( )

16. Μία συνάρτηση f θα έχει πάντα ή ολικά ή τοπικά ακρότατα. ( )

17. Η κλίση της εφαπτομένης μιας συνάρτησης στα τοπικά ακρότατα δεν ορίζεται. ( )

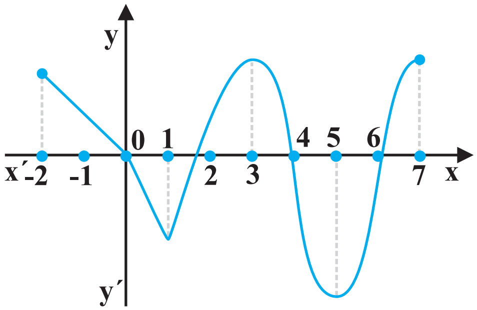
18. Για να βρω τα ακρότατα μιας συνάρτησης f ψάχνω τα σημεία όπου μηδενίζεται η f''. ( )

19. Η συνάρτηση $f(x) = e^x$ είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της. ( )

20. Η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της. ( )

21. Μια συνεχής συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατα στα σημεία αλλαγής της μονοτονίας της. ( )

22. Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ παρουσιάζει ακρότατο για $x = 0$. ( )



Στο διπλανό σχήμα παρουσιάζεται η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f.

23. Το πεδίο ορισμού της f είναι [- 2, 7]. ( )

24. Το πεδίο ορισμού της f είναι (- 2, 7]. ( )

25. Η συνάρτηση f παρουσιάζει στο διάστημα (2,4) τοπικό μέγιστο, για $x = 3$. ( )

26. Ισχύει ότι $f'(3) \neq 0$. ( )

27. Ισχύει $f'(x)>0$ για $x \in (2, 3)$ και $f'(x)>0$ για $x \in (3, 4)$. ( )

28. Στο διάστημα (2,3) η συνάρτηση f είναι αύξουσα. ( )

29. Ισχύει $f'(5) \neq 0$. ( )

30. Οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία (3,f(3)) και (5,f(5)) είναι παράλληλες μεταξύ τους. ( )

31. Στο διάστημα (0,2) η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x = 1$. ( )

32. Ορίζεται το $f'(1)$. ( )

Ερωτήσεις Πολλαπλής Επιλογής.

1. Η συνάρτηση f με $f(x) = αx + β$ παρουσιάζει:
α) μέγιστο στο x_0, αν $α > 0$
β) ελάχιστο στο x_0, αν $α < 0$
γ) δεν μπορούμε να αποφανθούμε
δ) μέγιστο στο x_0, για κάθε α
ε) τίποτε από τα προηγούμενα

2. Η συνάρτηση f με $f(x) = 3(x + 1)^3 – 2$ μεγιστοποιείται:
α) στο $x_0 = 1$
β) στο $x_0 = 0$
γ) στο $x_0 = -1$
δ) στο $x_0 = \pm 1$
ε) τίποτε από τα προηγούμενα

3. Εστω για τη συνάρτηση $f: A \to R$ ότι ισχύει για: $x_1, x_2 \in Δ \subseteq A$, με $x_1 < x_2$ έχουμε: $f(x_1) < f(x_2)$. Τότε η f είναι:
α) γνησίως αύξουσα
β) γνησίως φθίνουσα
γ) αύξουσα
δ) φθίνουσα
ε) κανένα από τα προηγούμενα

4. Έστω $f: A \to R$ και $x_0 \in A$. Αν για κάθε x σε μια περιοχή του x_0 ισχύει: $f(x_0) \geq f(x)$ τότε το $f(x_0)$ λέγεται:
α) τοπικό μέγιστο
β) ολικό μέγιστο
γ) τοπικό ελάχιστο
δ) ολικό ελάχιστο
ε) κανένα από τα προηγούμενα

5. Έστω $f: A \to R$ και $x_0 \in A$. Αν για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f(x_0) \geq f(x)$, τότε το $f(x_0)$ λέγεται:
α) τοπικό μέγιστο
β) ολικό μέγιστο
γ) τοπικό ελάχιστο
δ) ολικό ελάχιστο
ε) κανένα από τα προηγούμενα

6. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε διάστημα $Δ \subseteq R$ και γνησίως φθίνουσα στο Δ, τότε η f' είναι αρνητική:
α) μόνο σ' ένα σημείο του Δ
β) σε όλα τα εσωτερικά σημεία του Δ
γ) στο σημείο μηδέν
δ) μόνο στα σημεία που μηδενίζουν την f
ε) κανένα από τα παραπάνω

7. Η συνάρτηση f με $f(x) = αx^3$ είναι:
α) γνησίως αυξουσα αν $α > 0$
β) γνησίως αυξουσα αν $α < 0$
γ) γνησίως αυξουσα στο $(-\infty, 0)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$
δ) γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$ και γνησίως αυξουσα στο $(0, +\infty)$
ε) κανένα από τα προηγούμενα.

8. Η συνάρτηση f με $f(x) = \alpha x^2$ παρουσιάζει:
α) ολικό μέγιστο στο σημείο (0, 0) αν $\alpha > 0$
β) γνησίως αυξουσα στο R
γ) ολικό ελάχιστο στο σημείο (0, 0) αν $\alpha > 0$
δ) γνησίως φθίνουσα στο R
ε) κανένα από τα προηγούμενα.

9. Αν για συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ, ισχύουν $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) < 0$, με x_0 εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η συνάρτηση f:
α) παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x = x_0$
β) είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το διάστημα Δ
γ) παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = x_0$
δ) δεν παρουσιάζει ακρότατο για $x = x_0$
ε) κανένα από τα προηγούμενα

10. Αν για συνάρτηση f, παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ, ισχύουν $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) > 0$, με x_0 εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η συνάρτηση f:
α) παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x = x_0$
β) είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το διάστημα Δ
γ) παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = x_0$
δ) δεν παρουσιάζει ακρότατο για $x = x_0$
ε) κανένα από τα προηγούμενα

11. Η συνάρτηση f, παραγωγίσιμη σ' ένα ανοικτό διάστημα Δ, είναι γνησίως αύξουσα στο Δ, αν ισχύει:
α) $f'(x) = 0$, για κάθε σημείο x του Δ
β) $f(x) = 0$, για κάθε σημείο x του Δ
γ) $f'(x) > 0$, για κάθε σημείο x του Δ
δ) $f'(x) < 0$, για κάθε σημείο x του Δ
ε) κανένα από τα προηγούμενα

12. Η συνάρτηση f με $f'(x) = (x-1)^2$. Τότε η f:
α) είναι γνησίως αυξουσα.
β) είναι γνησίως φθίνουσα.
γ) παρουσιάζει τοπικό ακρότατο για $x = 1$
δ) παρουσιάζει ολικό ακρότατο για $x = 1$
ε) κανένα από τα προηγούμενα.

13. Η συνάρτηση f, παραγωγίσιμη σ' ένα ανοικτό διάστημα Δ, είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ, αν ισχύει:
α) $f'(x) = 0$, για κάθε σημείο x του Δ
β) $f(x) = 0$, για κάθε σημείο x του Δ
γ) $f'(x) > 0$, για κάθε σημείο x του Δ
δ) $f'(x) < 0$, για κάθε σημείο x του Δ
ε) κανένα από τα προηγούμενα

14. Έστω συνάρτηση f, παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 εσωτερικό σημείο του Δ για το οποίο υπάρχει $f''(x_0)$. Το εσωτερικό σημείο x_0, είναι σημείο ακροτάτου της f, αν

ισχύει:

α) $f(x_0) = 0$ β) $f'(x_0) \neq 0$ γ) $f''(x_0) = 0$

δ) $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) \neq 0$ ε) $f'(x_0) > 0$ και $f(x_0) = 0$

15. Εστω συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $f'(x_0) = 0$, $x_0 \in (\alpha, \beta)$ και $f''(x_0) > 0$, τότε:

α) x_0 μέγιστο στο (α, β) β) x_0 ελάχιστο στο (α, β) γ) x_0 ολικό ελάχιστο

δ) x_0 ολικό μέγιστο ε) τίποτε από τα προηγούμενα

16. Εστω η συνάρτηση f με $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$. Τότε αυτή έχει:

α) δυο τοπικά ακρότατα β) δεν έχει ακρότατα

γ) έχει το πολύ δυο τοπικά ακρότατα

δ) έχει μοναδικό ακρότατο ε) κανένα από τα προηγούμενα

17. Αν για μια συνάρτηση f ισχύει: $f''(x_0) = 0$ και $f'''(x_0) > 0$, τότε:

α) η f΄ παρουσιάζει (τοπικό) μέγιστο στο x_0

β) η f΄ παρουσιάζει (τοπικό) ελάχιστο στο x_0

γ) η f παρουσιάζει (τοπικό) μέγιστο στο x_0

δ) η f παρουσιάζει (τοπικό) ελάχιστο στο x_0

ε) τίποτε από τα προηγούμενα

Ασκήσεις.

1. Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα αν υπάρχουν των συναρτήσεων f, g με: α) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 10$ β) $g(x) = x\ln x$

2. Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα αν υπάρχουν των συναρτήσεων f, g με: α) $f(x) = e^x + x$ β) $g(x) = \dfrac{x^2+1}{e^x}$

3. Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα αν υπάρχουν των συναρτήσεων f, g με: α) $f(x) = 4x^3 - 21x^2 + 18x + 20$ β) $g(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

4. Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα αν υπάρχουν των συναρτήσεων f, g με: α) $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$ β) $g(x) = \dfrac{e^{x^2+4}}{x^2}$

5. Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα αν υπάρχουν των συναρτήσεων f, g με: α) $f(x) = 2(x+1)\ln(x+1)$ β) $g(x) = \ln\left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$

6. Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα αν υπάρχουν των συναρτήσεων f, g με:
α) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 4$ β) $g(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x - 1$

7. Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα αν υπάρχουν των συναρτήσεων f, g με:
α) $f(x) = 2x^2 - 4x - 1$ β) $g(x) = 4x - x^2 + 2$

8. Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα αν υπάρχουν των συναρτήσεων f, g με:
α) $f(x) = x^2e^{-x}$ β) $g(x) = (2x - x^2)e^x$

9. Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα αν υπάρχουν των συναρτήσεων f, g με:
α) $f(x) = x^3 - 3x$ β) $g(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 - 5x + 4$

10. Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα αν υπάρχουν των συναρτήσεων f, g με:
α) $f(x) = \frac{2x^2 + 3}{x + 1}$ β) $g(x) = \frac{x^2}{x + 4}$

11. Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα αν υπάρχουν των συναρτήσεων f, g με:
α) $f(x) = \ln\sqrt{\frac{x^4}{2} + x^2}$ β) $g(x) = \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}$

12. Εστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^3 + 3x^2$. Να βρείτε το σημείο $(x_0, f(x_0))$ στο οποίο ο ρυθμός μεταβολής είναι ελάχιστος.

13. Εστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^3 + αx^2 + βx + γ$. Να βρείτε τα $α,β,γ \in R$ ώστε η f να έχει μέγιστο στο Α(1, 3) και $f''(3) = 0$.

14. Εστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^3 + αx^2 + βx + γ$. Να βρείτε τα $α,β,γ \in R$ ώστε η f να έχει μέγιστο το Α(1,10) και να διέρχεται από το Β(0,1).

15. Εστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{αx^2}{2} + 6x - 10$. Να βρείτε τον $α \in (0, +\infty)$ ώστε η f να είναι γνησίως φθίνουσα μόνο στο διάστημα (2,3).

16. Να προσδιορίσετε τον $\alpha \in R$ ώστε η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{\alpha x + 4}{x + \alpha}$ να είναι αύξουσα.

17. Για ποιες τιμές του $\alpha \in R$ η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \dfrac{\alpha x^2 - 1}{x - 1}$ είναι γνησίως αύξουσα;

18. Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in R$ ώστε η συνάρτηση f με $f(x) = \alpha \ln x^2 + \beta x^2 - \ln x + 4$ να παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία $x_1 = 1/2$, $x_2 = 1/4$ και στη συνέχεια να προσδιορίσετε το είδος των ακροτάτων αυτών.

19. Να προσδιορίσετε τα $\alpha, \beta \in R$ ώστε η συνάρτηση f με $f(x) = \alpha \ln x + \beta x^2 + 6x$, $x > 0$ να έχει μέγιστο στο σημείο Μ(1, 5).

20. Να βρεθούν οι $\alpha, \beta \in R$ ώστε η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 6x + 1$ να έχει ακρότατα στα σημεία $x_0 = 1$ και $x_0 = -2$. Επειτα να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση.

21. Να προσδιορίσετε τον $\alpha \in R$ ώστε η συνάρτηση f με $f(x) = \alpha συνx + συν3x$ να παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $x_0 = \pi/4$.

22. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + 3$, $x \in R$, $\alpha, \beta \in R$. Να βρείτε τα α,β ώστε η f να έχει στο σημείο Α(2,5) τοπικό ακρότατο και κατόπιν να βρείτε το είδος του ακροτάτου.

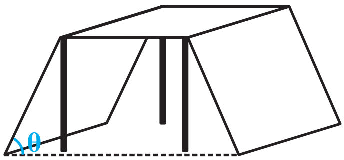
23. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + 4x + 6$, $x \in R$, $\alpha, \beta \in R$.
α) Να προσδιορίσετε τα α,β, ώστε η f να έχει τοπικά ακρότατα στα σημεία με τετμημένες $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.
β) Να βρείτε τις τιμές των ακροτάτων.

24. Να δείξετε ότι για κάθε $x \in (0, \pi/2)$ είναι $xημx + συνx > 1$.

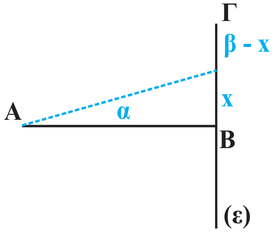
25. Να δείξετε ότι για κάθε $x>0$ είναι $x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x$.

Προβλήματα.

26. Ενα φύλλο μουσαμά σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου διπλώνεται σε τρία ίσα μέρη ώστε να δημιουργηθεί μια τέντα σχήματος ισοσκελούς τραπεζίου. Να βρεθεί το άνοιγμα της βάσης ώστε να έχει τη μέγιστη χωρητικότητα.



27. Ενα κινητό απέχει από την ευθεία (ε) απόσταση ΑΒ = α και κατευθύνεται στο σημείο Γ που απέχει από το Β απόσταση ΓΒ = β > α, στο συντομότερο δυνατό χρόνο. Σε ποιο σημείο της (ε) πρέπει να φτάσει δεδομένου ότι επί της (ε) κινείται με διπλάσια ταχύτητα;



28. Δίνεται τετραγωνικό φύλλο χαρτιού πλευράς α. Ζητείται το μήκος της πλευράς που πρέπει να αποκοπεί από τις τέσσερις κορυφές του ώστε το σχηματιζόμενο με αναδίπλωση ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο να έχει μέγιστη χωρητικότητα.

29. Από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με την ίδια περίμετρο, ποιο είναι εκείνο που έχει το μέγιστο εμβαδό;

30. Από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με εμβαδό 1600 m^2, να βρείτε τις διαστάσεις εκείνου, που έχει την μικρότερη περίμετρο.

31. Να αποδείξετε ότι από όλα τα ισοσκελή τρίγωνα, που είναι εγγεγραμμένα σε κύκλο ακτίνας R, το ισόπλευρο έχει μεγαλύτερο εμβαδό.

32. Να βρεθούν δύο αριθμοί x, y με σταθερό άθροισμα 20, που να έχουν το μεγαλύτερο γινόμενο.

33. Να βρεθεί ποιο από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα που εγγράφονται σε κύκλο ακτίνας ρ παρουσιάζει μέγιστο εμβαδόν.

34. Εστω η ευθεία $y = x - 3$. Βρείτε το σημείο της ώστε το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεών του από τα σημεία Α(1,1) και Β(1,5) να είναι ελάχιστο.

35. Βρείτε το σημείο της υπερβολής $y = \frac{\alpha}{x}$, $\alpha > 0$ που βρίσκεται πιο κοντά στην αρχή των αξόνων.

36. Σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ να βρεθεί σημείο Μ επί της ΓΔ τέτοιο ώστε το $MA^2 + MB^2$ να είναι ελάχιστο.

37. Να εγγραφεί ορθογώνιο τρίγωνο σε ημικύκλιο ακτίνας r = 2 μεγίστου εμβαδού.

38. Μια βιομηχανία παράγει x τεμάχια ενός προϊόντος με ημερήσιο κόστος (σε δεκάδες ευρώ) $K(x) = \frac{x^3}{6} - 10x^2 + 300x + 1500$. Η τίμη πώλησης κάθε τεμαχίου δίνεται από την σχέση Ε(x) = 210 – x. Ποια θα πρέπει να είναι η ημερήσια παραγωγή τεμαχίων, δεδομένου ότι δεν ξεπερνα τις 100 μονάδες ώστε να έχουμε μέγιστο κέρδος;

39. Ένα ταξιδιωτικό πρακτορείο κάνει την εξής προσφορά. Διοργανώνει τριήμερη εκδρομή για τουλάχιστον 30 άτομα με τιμή συμμετοχής 400 ευρώ το άτομο. Για κάθε επιπλέον άτομο η τιμή συμμετοχής μειώνεται για όλους κατά 5 ευρώ. Πόσα άτομα θα σύμφερε το πρακτορείο να συμμετάσχουν ώστε να έχει μέγιστο κέρδος;

40. Μια βιοτεχνία παράγει x τεμάχια ενός προϊόντος με ημερήσιο κόστος (σε δεκάδες ευρώ) Κ(x) = 90x + 250. Η τιμή πώλησης δίνεται από την σχέση: $T(x) = 1500 - x^2/10$. Ποια θα πρέπει να είναι η ημερήσια παραγωγή τεμαχίων, δεδομένου ότι δεν ξεπερνα τις 100 μονάδες ώστε να έχουμε μέγιστο κέρδος; Αν η βιοτεχνία διαφημίσει τα προϊόντα της με επιπλέον κόστος Δ(x) = 3x + 80 να βρείτε και πάλι την ημερήσια παραγωγή που μεγιστοποιεί το κέρδος.

41. Μια βιομηχανία ηλεκτρονικών ειδών παράγει x εξαρτήματα τύπου Α ημερησίως με συνολικό κόστος $K_1(x) = x^2 + 8x + 21$ (σε ευρώ) και τιμή πώλησης $Π_1(x) = 20 - x$ και y εξαρτήματα τύπου Β ημερησίως με συνολικό κόστος $K_2(y) = y^2 + 25$ και τιμή πώλησης $Π_1(y) = 8 - y$. Να βρείτε τον αριθμό τηλεοράσεων και στερεοφωνικών που πρέπει να παράγει η βιομηχανία ώστε να μεγιστοποιήσει το κέρδος της.

42. Η τιμή πώλησης μιας ηλεκτρικής συσκευής είναι 15.000 ευρώ. Το κόστος της συναρτήσει του χρόνου κατασκευής (σε ώρες) προσεγγίζεται από τον τύπο της συνάρτησης $K(t) = 2t^2 + 500t^{-1}$. Πόσες ώρες κατασκευής απαιτούνται για να πραγματοποιηθεί το μέγιστο κέρδος και πόσο είναι αυτό;

43. Η ενέργεια που καταναλώνει μια ηλεκτρική συσκευή που λειτουργεί t ώρες, δίνεται από τον τύπο της συνάρτησης $E(t) = \frac{(t-5)^2 + 119}{t}$. Πόση ώρα πρέπει να λειτουργήσει για να καταναλώσει τη μικρότερη ενέργεια; Πόση είναι η ελάχιστη ενέργεια;

44. Εστω ότι η θερμοκρασία ενός ψυγείου προσεγγίζεται από τον τύπο $\Theta(t) = 4 - \frac{3t^2}{(t+1)^2}$. Δείξτε ότι η θερμοκρασία του ψυγείου μειώνεται συνεχώς.

45. Η θερμότητα Θ(t), που παράγεται από μια αντίσταση, μεταβάλλεται με το χρόνο t (σε min) σύμφωνα με τον τύπο της συνάρτησης $\Theta(t) = 300t - 2t^3$ και μετριέται σε Kcal. Σε ποιά χρονική στιγμή παράγεται μέγιστη θερμότητα και πόση είναι;

46. Η τιμή εισιτηρίου των αστικών λεωφορείων ήταν σταθερή τα τελευταία 8 χρόνια στις 100 δρχ. Το κόστος μεταφοράς ανά επιβάτη στη διάρκεια των 8 χρόνων προσεγγίζεται από τον τύπο της συνάρτησης $K(t) = t^2 + \frac{250}{t}$, όπου $t \in (0, 8]$ ο χρόνος. Να προσδιοριστεί η χρονική στιγμή κατά την οποία πραγματοποιήθηκε το μέγιστο κέρδος. Πόσο είναι αυτό το κέρδος;

47. Το κόστος κατασκευής x τεμαχίων ενός προϊόντος ημερησίως δίνεται από τον τύπο $K(x) = \frac{x^2}{2} + 50x + 100$ ευρώ. Αν κάθε τεμάχιο πωλείται $2000 - x$ ευρώ, πόσα τεμάχια πρέπει να παράγονται ημερησίως, ώστε να έχουμε το μέγιστο κέρδος;

48. Η ενέργεια που καταναλώνει ένας μικροοργανισμός που κινείται μέσα στο αίμα ενός ασθενούς με ταχύτητα υ, προσεγγίζεται από τον τύπο της συνάρτησης:

$E(\upsilon) = \frac{1}{\upsilon}[2(\upsilon - 35)^2 + 750]$

α) Με ποια ταχύτητα πρέπει να κινηθεί για να καταναλώσει τη μικρότερη ενέργεια;
β) Πόση είναι η ελάχιστη ενέργεια;

49. Ένα εργοστάσιο ζαχαροπλαστικής παρασκευάζει μεταξύ άλλων ταψάκια γαλακτομπούρεκου. Υπολογίστηκε ότι η παρασκευή x ταψιών την εβδομάδα κοστίζει περίπου $(\frac{x^2}{4} + 25x + 25)$ δρχ. Αν η τιμή πώλησης του ταψιού είναι $(1000 - \frac{x}{2})$ δρχ., πόσα ταψάκια γαλακτομπούρεκο πρέπει να παράγει την εβδομάδα, ώστε να έχει το μεγαλύτερο δυνατό κέρδος;

2.1 Βασικές Έννοιες

Απαραίτητες γνώσεις Θεωρίας

Θεωρία 1.

α) Τι είναι η Στατιστική;
β) Τι ονομάζουμε μεταβλητή και σε ποιά είδη τη διακρίνουμε;
γ) Τι ονομάζουμε πληθυσμό και τι δείγμα;

Απάντηση:

α) Στατιστική είναι η επιστήμη που βασίζεται σε ένα σύνολο αρχών και μεθόδων που αφορούν:

- την **δειγματοληψία** δηλαδή τον τρόπο συλλογής των απαιτούμενων πληροφοριών.
- την **αναλυτική παρουσίαση** των δεδομένων.
- την **στατιστική συμπερασματολογία** δηλαδή την ανάλυση και την εξαγωγή συμπερασμάτων.

β) Το αντικείμενο για το οποίο συλλέγουμε πληροφορίες ονομάζεται **μεταβλητή X** και οι διάφορες τιμές που μπορεί να πάρει λέγονται **τιμές** x_i της μεταβλητής.
Οι μεταβλητές διακρίνονται σε:

- **Ποιοτικές** όταν οι τιμές τους δεν εκφράζονται αριθμητικά. Π.χ. Τόπος γέννησης, επάγγελμα κ.λ.π.
- **Ποσοτικές** όταν οι τιμές τους είναι αριθμητικές. Π.χ. Ύψος, ηλικία, νούμερο παπουτσιών κ.λ.π. Οι ποσοτικές μεταβλητές χωρίζονται σε δυο κατηγορίες:
  ι)Στις διακριτές, οι οποίες δεν μπορουν να πάρουν οποιαδήποτε αριθμητική τιμή. Π.χ. ο αριθμός παιδιών σε μια οικογένεια παίρνει μόνο φυσικούς αριθμούς.
  ιι) Στις συνεχείς, οι οποίες θεωρητικά μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε αριθμητική τιμή ενός διαστήματος.
  Π.χ. Υποθέτοντας ότι το βάρος ενός μη υπέρβαρου ενήλικα σε κιλά ανήκει στο διάστημα [45, 100] τότε μπορεί να έχουμε οποιαδήποτε τιμή όπως 57,382 κιλά.

Θεωρία 2.

α) Τι είναι η πληθυσμός;
β) Τι είναι δείγμα και τι μέγεθος δείγματος;
γ) Με ποια βασικά κριτήρια γίνεται η επιλογή του δείγματος;

Απάντηση:

α) Πληθυσμός είναι το σύνολο των ατόμων στα οποία αναφέρεται η μεταβλητή Χ. Π.χ. αν ενδιαφερόμαστε να μάθουμε ποιό κόμμα πιστεύουν οι Έλληνες ότι θα κερδίσει τις επόμενες εκλογές, ο πληθυσμός είναι οι Έλληνες ψηφοφόροι.

β) Δείγμα είναι ένα μέρος του πληθυσμού, του οποίου η άποψη "θεωρείται αντιπροσωπευτική" για τον πληθυσμό. Το πλήθος των ατόμων που το απαρτίζουν ονομάζεται **μέγεθος του δείγματος**. Η σωστή επιλογή του δείγματος είναι καθοριστική για τα αποτελέσματα μιας στατιστικής έρευνας και γίνεται με βάση τα κριτήρια της δειγματοληψίας.

γ) Οι βασικότερες παράμετροι για την επιλογή του δείγματος είναι:

- **Το μέγεθος.** Υπάρχουν εμπειρικοί τρόποι υπολογισμού του μεγέθους ενός δείγματος το οποίο εξαρτάται από το μέγεθος του πληθυσμού. Μεγαλύτερο ή μικρότερο δείγμα είναι πιθανό να μας οδηγήσει σε εσφαλμένα συμπεράσματα.
- **Η ποιότητα.** Στο δείγμα πρέπει να περιλαμβάνονται άτομα διαφορετικού φύλου, ηλικίας, τόπου διαμονής, κοινωνικής τάξης κ.λ.π. ανάλογα βέβαια με το αντικείμενο της έρευνας.

Αθροίσματα $\Sigma\alpha_i$.

Στα επόμενα θα χρησιμοποιηθούν η έννοια του **αθροίσματος κ στοιχείων** και ο αντίστοιχος συμβολισμός. Συνοπτικά έχουμε:

$$\sum_{i=1}^{\kappa} \alpha_i = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_\kappa$$

Παράδειγμα 1: Είναι $\sum_{i=1}^{5} \alpha_i = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5$

Για τα αθροίσματα αποδεικνύονται εύκολα οι παρακάτω ιδιότητες:

ι) $\sum_{i=1}^{\kappa} c = \kappa \cdot c$

Απόδειξη: $\sum_{i=1}^{\kappa} c = \underbrace{c + c + c + \ldots\ldots + c}_{k-\text{φορές}} = \kappa \cdot c$

Παράδειγμα 2: $\sum_{i=1}^{10} 4 = 10 \cdot 4 = 40$

ιι) $\sum_{i=1}^{\kappa} c \cdot \alpha_i = c \cdot \sum_{i=1}^{\kappa} \alpha_i$

Απόδειξη: $\sum_{i=1}^{\kappa} c \cdot \alpha_i = c\alpha_1 + c\alpha_2 + \ldots\ldots c\alpha_\kappa = c(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots\ldots \alpha_\kappa) = c \cdot \sum_{i=1}^{\kappa} \alpha_i$

Παράδειγμα 3: $\sum_{i=1}^{10} 5\alpha_i = 5\sum_{i=1}^{10} \alpha_i$

ιιι) $\sum_{i=1}^{\kappa} (\alpha_i \pm \beta_i) = \sum_{i=1}^{\kappa} \alpha_i \pm \sum_{i=1}^{\kappa} \beta_i$

Απόδειξη: $\sum_{i=1}^{\kappa} (\alpha_i \pm \beta_i) = \alpha_1 \pm \beta_1 + \alpha_2 \pm \beta_2 + \ldots\ldots \alpha_\kappa \pm \beta_\kappa = (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \alpha_\kappa) \pm (\beta_1 + \beta_2 + \ldots \beta_\kappa) =$

$= \sum_{i=1}^{\kappa} \alpha_i \pm \sum_{i=1}^{\kappa} \beta_i$

Παράδειγμα 4: $\sum_{i=1}^{12} (\alpha_i + 4) = \sum_{i=1}^{12} \alpha_i + \sum_{i=1}^{12} 4 = \sum_{i=1}^{12} \alpha_i + 4 \cdot 12 = \sum_{i=1}^{12} \alpha_i + 48$

ιv) $\sum_{i=1}^{\kappa} \alpha_i = \sum_{i=1}^{\lambda} \alpha_i + \sum_{i=\lambda+1}^{\kappa} \alpha_i$, για $\lambda < \kappa$

Απόδειξη:

$$\sum_{i=1}^{\kappa} \alpha_i = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \alpha_\kappa = (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \alpha_\lambda) + (\alpha_{\lambda+1} + \alpha_{\lambda+2} + \ldots \alpha_\kappa) = \sum_{i=1}^{\lambda} \alpha_i + \sum_{i=\lambda+1}^{\kappa} \alpha_i$$

Παράδειγμα 5: $\sum_{i=1}^{20} \alpha_i = \sum_{i=1}^{13} \alpha_i + \sum_{i=14}^{20} \alpha_i$

Ερωτήσεις Σωστό – Λάθος.

Χαρακτηρίστε σαν σωστές (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις και αιτιολογίστε τις απαντήσεις σας. Στις περιπτώσεις λανθασμένων προτάσεων αναφέρατε ποιό είναι το λάθος και διορθώστε το.

1. Το χρώμα κάθε αυτοκινήτου είναι ποιοτική μεταβλητή. ( )
2. Ο αριθμός των ανθρώπων που παρακολουθούν μια συγκεκριμένη τηλεοπτική εκπομπή είναι διακριτή ποσοτική μεταβλητή. ( )
3. Ποσοτική λέγεται η μεταβλητή της οποίας οι τιμές είναι αριθμοί. ( )
4. Ο αριθμός των απουσιών των μαθητών της Γ΄ Λυκείου είναι συνεχής ποσοτική μεταβλητή. ( )
5. Το βάρος ενός ατόμου είναι μια ποσοτική διακριτή μεταβλητή. ( )
6. Οι μουσικές προτιμήσεις ενός ατόμου είναι μια ποιοτική μεταβλητή. ( )
7. Η διάρκεια μιας τηλεφωνικής συνδιάλεξης είναι διακριτή ποσοτική μεταβλητή. ( )
8. Η ομάδα αίματος μιας ομάδας ανθρώπων είναι ποιοτική μεταβλητή. ( )
9. Δείγμα καλούμε ένα υποσύνολο του πληθυσμού. ( )
10. Η συλλογή πληροφοριών από ένα δείγμα ονομάζεται απογραφή. ( )
11. Οσο πιο αντιπροσωπευτικό είναι ένα δείγμα τόσο πιο ακριβή θα είναι τα συμπεράσματα της έρευνας. ( )
12. Θέλουμε να μελετήσουμε τον αριθμό των παιδιών των οικογενειών της Ελλάδας. Επιλέγουμε ένα δείγμα 20 οικογενειών. ( )

Ερωτήσεις Πολλαπλής Επιλογής.

1. Ποια από τις παρακάτω μεταβλητές είναι συνεχής;
   α) Το νούμερο των παπουτσιών.
   β) Ο τηλεοπτικός σταθμός που προτιμάμε.
   γ) Η ποσότητα μιας ουσίας σε ένα φάρμακο.
   δ) Ο βαθμός σε ένα τεστ μαθηματικών.
   ε) Κανένα από τα παραπάνω.

2. Θέλουμε να μελετήσουμε τον τρόπο διασκέδασης κατά τον ελεύθερο χρόνο. Ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα θα ήταν:
   α) Άτομα από την πρωτεύουσα.
   β) Άτομα εώς 18 ετών.
   γ) Άτομα του ίδιου φύλου.
   δ) Τα (α),(β),(γ) μαζί.
   ε) Κανένα από τα παραπάνω.

3. Από τις παρακάτω μεταβλητές διακριτή ποσοτική είναι:

α) το βάρος μαθητών.
β) η μηνιαία κατανάλωση ρεύματος.
γ) ο αριθμός απουσιών.
δ) η ποιότητα του περιεχομένου των βιβλίων.
ε) ο χαρακτηρισμός της διαγωγήστων μαθητών.

4. Για να μελετήσουμε το ετήσιο κατά κεφαλή εισόδημα:

α) Διεξάγουμε έρευνα τηλεφωνικά.
β) Παίρνουμε συνεντεύξεις από άτομα στο δρόμο.
γ) Συμπληρώνουμε ερωτηματολόγιο.
δ) Ρωτούμε ευθέως τους συνεντευξιαζόμενους.
ε) Κανένα από τα παραπάνω.

Ασκήσεις.

1. Να βρείτε τρεις ποιοτικές και τρείς ποσοτικές μεταβλητές που αφορούν ένα δείγμα μαθητών της Γ΄Λυκείου.

2. Έγινε μια δειγματοληπτική έρευνα για το βάρος των εμπορευμάτων μιας αποθήκης λαχανικών. Βρήκαμε ότι τα βάρη 10 κιβωτίων είναι σε κιλά:

17, 12, 12, 15, 18, 22, 24, 25, 19, 20. Να βρείτε:

ι) Ποιος είναι ο πληθυσμός.
ιι) Ποιες είναι οι μονάδες.
ιιι) Ποιο είναι το δείγμα.
ιν) Ποια είναι η μεταβλητή και ποιες οι τιμές της.

3. Σ' ένα Λύκειο θέλουμε να εξετάσουμε την επίδοση 10 μαθητών στη Στατιστική στο τέλος του β΄ τριμήνου. Πήραμε τις επόμενες βαθμολογίες:

15, 11, 10, 10, 14, 16, 19, 18, 13, 17. Να βρείτε:

ι) Ποιος είναι ο πληθυσμός.
ιι) Ποια είναι τα άτομα.
ιιι) Ποια είναι η μεταβλητή.
ιν) Αν η μεταβλητή είναι ποιοτική ή ποσοτική, συνεχής ή διακριτή.
ν) Ποιες είναι οι παρατηρήσεις.

4. Θέλουμε να εξετάσουμε την προτίμηση των ψηφοφόρων για τις επόμενες εκλογές. Επιλέγουμε ένα δείγμα 30 οικογενειών της Κρήτης. Να αναφέρετε αν η επιλογή του δείγματος ήταν σωστή και γιατί.

5. Μελετάμε τους μαθητές της Γ΄ τάξης ενός Λυκείου ως προς το βαθμό απολυτηρίου τους, τη διαγωγή τους, τον αριθμό απουσιών, την κατεύθυνση που παρακολουθούν, το βάρος τους. Να βρείτε:

ι) Ποιες από τις μεταβλητές αυτές είναι: α) ποιοτικές, β) ποσοτικές.
ιι) Από τις ποσοτικές μεταβλητές, ποιες είναι: α) διακριτές, β) συνεχείς.

6. Αν είναι $\sum_{i=1}^{5} x_i = 3$ και $\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 23$, να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

α) $\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 23$ β) $\sum_{i=1}^{5} (2x_i + 3)2$

7. Αν είναι $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 40$ και $\sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 20$, να υπολογίσετε το άθροισμα $\sum_{i=1}^{10} (x_i + y_i)(x_i - y_i)$

8. Αν είναι $\sum_{i=1}^{15} x_i = 25$, με xi τιμές μιας μεταβλητής X, να βρεθεί το άθροισμα των τιμών:

α) όταν κάθε μια από αυτές προσαυξηθεί κατά 2.

β) όταν κάθε μια από αυτές τριπλασιαστεί.

2.2 Παρουσίαση Στατιστικών Δεδομένων

Απαραίτητες γνώσεις Θεωρίας

Θεωρία 1.

Να περιγράψετε την κατασκευή ενός πίνακα συχνοτήτων.

Χρησιμοποιείται: Σε όλες τις περιπτώσεις.

Κατασκευή:

Ο πίνακας κατανομής συχνοτήτων έχει τέσσερις στήλες. Η πρώτη είναι η στήλη των τιμών x_i όπου αναγράφουμε όλες τις τιμές x_i της μεταβλητής που εμφανίζονται στο σύνολο των παρατηρήσεων.

Η δεύτερη είναι η στήλη των συχνοτήτων. Δίπλα σε κάθε τιμή x_i αναγράφουμε πόσες φορές εμφανίζεται αυτή στο σύνολο των παρατηρήσεων. Ο φυσικός αυτός αριθμός συμβολίζεται με ν_i και ονομάζεται **(απόλυτη) συχνότητα της τιμής x_i.**

Παρατήρηση:

Το άθροισμα όλων των συχνοτήτων ισούται με το μέγεθος του δείγματος ν.

$$\boxed{\sum_{i=1}^{k} \nu_i = \nu} \quad (1)$$

Η τρίτη είναι η **στήλη των σχετικών συχνοτήτων f_i.** Διαιρώντας κάθε συχνότητα ν_i με το μέγεθος του δείγματος ν βρίσκουμε την **σχετική συχνότητα f_i** της τιμής x_i. Αρα:

$$\boxed{f_i = \frac{\nu_i}{\nu}} \quad (2)$$

Παρατήρηση:

Το άθροισμα των σχετικών συχνοτήτων f_i, i = 1, 2, ... Κ ισούται με 1.

$$\boxed{\sum_{i=1}^{k} f_i = 1} \quad (3)$$

Κατά τις διαιρέσεις v_i/v χρησιμοποιούμε στρογγυλοποίηση και όχι αποκοπή δεκαδικών ψηφίων ώστε το άθροισμα όλων των σχετικών συχνοτήτων να ισούται με 1.
Η τέταρτη είναι η **στήλη των σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό** και συμπληρώνεται πολλαπλασιάζοντας κάθε σχετική συχνότητα επί 100. Ετσι βρίσκουμε την **σχετική συχνότητα επί τοις εκατό (f_i%)**.

$$f_i\% = \frac{v_i}{v} \cdot 100 \quad (4)$$

Παρατήρηση:
Το άθροισμα των σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό, f_i% με i = 1, 2, ... K ισούται με 100.

Παράδειγμα 1:
Σε δείγμα 20 παντρεμένων ζευγαριών ο αριθμός των παιδιών φαίνεται στον πίνακα.

0	2	1	2	1	0	2	2	2	3
1	2	2	2	4	1	2	4	2	3

Ο πίνακας κατανομής συχνοτήτων θα είναι:

x_i	v_i	f_i	f_i%
0	2	0.1	10
1	4	0.2	20
2	10	0.5	50
3	2	0.1	10
4	2	0.1	10
	20	1	100

Θεωρία 2

Να περιγράψετε την κατασκευή ενός πίνακα κατανομής αθροιστικών συχνοτήτων.

Χρησιμοποιείται: Σε περιπτώσεις ποσοτικών μεταβλητών.

Κατασκευή:
Ο πίνακας κατανομής αθροιστικών συχνοτήτων συνήθως κατασκευάζεται μαζί με τον πίνακα των απολύτων συχνοτήτων εκτός αν το αντίθετο τονίζεται ιδιαίτερα από την άσκηση ή δεν εξυπηρετεί και περιλαμβάνει τρείς στήλες.
Η πρώτη είναι η στήλη των αθροιστικών συχνοτήτων N_i. Για κάθε μεταβλητή x_i γράφουμε το άθροισμα της συχνότητας v_i με όλες τις προηγούμενες συχνότητες. Ο αριθμός: $N_i = v_1 + v_2 + .. + v_i$ ονομάζεται **αθροιστική συχνότητα της τιμής x_i.** Ανάλογα ορίζονται:

- **Η αθροιστική σχετική συχνότητα F_i**
- **Η αθροιστική σχετική συχνότητα επί τοις εκατό $F_i\%$**

και κατασκευάζονται οι αντίστοιχες στήλες του πίνακα.

Παρατήρηση:
Η τελευταία αθροιστική συχνότητα ισούται με το μέγεθος του δείγματος ν καθώς και η τελευταία αθροιστική σχετική συχνότητα ισούται με 1.

Παράδειγμα 2:
Να κατασκευαστεί ο πίνακας κατανομής συχνοτήτων και αθροιστικών συχνοτήτων για τον αριθμό παιδιών του παραδείγματος 1.

x_i	$ν_i$	f_i	$f_i\%$	N_i	F_i	$F_i\%$
0	2	0.1	10	2	0.1	10
1	4	0.2	20	6	0.3	30
2	10	0.5	50	16	0.8	80
3	2	0.1	10	18	0.9	90
4	2	0.1	10	20	1	100
	20	1	100			

Θεωρία 3

Με την βοήθεια των παραπάνω πινάκων κατασκευάζονται τα ακόλουθα διαγράμματα:

1. Διάγραμμα συχνοτήτων (LINE DIAGRAM)

Χρησιμοποιείται: Σε ποσοτικές μεταβλητές (συνήθως διακριτές).

Κατασκευή:
Χαράζουμε δύο κάθετους άξονες.
Στον οριζόντιο άξονα τοποθετούμε της τιμές της μεταβλητής σε ι**σομήκη διαστήματα**.
Στον κατακόρυφο άξονα κάνουμε μια αρίθμηση στην οποία αντιστοιχούμε:

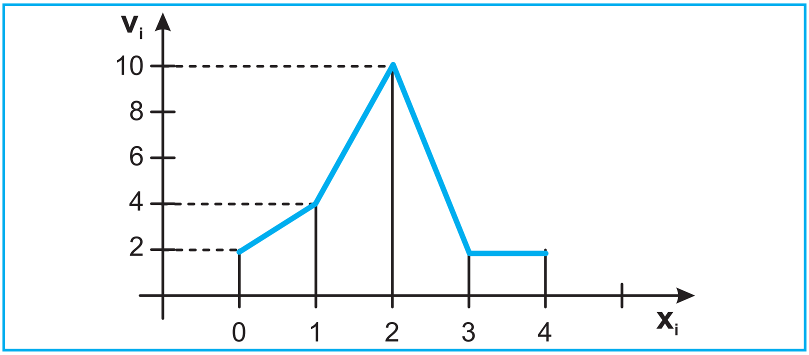
- την (απόλυτη) συχνότητα για διάγραμμα (απόλυτων) συχνοτήτων.
- την σχετική συχνότητα (συνήθως επί τοις εκατό) για διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων.
- την αθροιστική συχνότητα για διάγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων.
- την αθροιστική σχετική συχνότητα (συνήθως επί τοις εκατό) για διάγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.

Χαράζουμε κατακόρυφες γραμμές για κάθε μια τιμή της μεταβλητής, έτσι ώστε το μήκος κάθε γραμμής να ισούται με τη συχνότητα της τιμής που αναγράφεται στην αντίστοιχη στήλη του πίνακα κατανομής συχνοτήτων.
Με τη βοήθεια του διαγράμματος συχνοτήτων μπορούμε να χαράξουμε **το πολύγωνο συχνοτήτων** ενώνοντας τα πάνω άκρα των κατακόρυφων γραμμών**.**

Ανάλογα σχηματίζονται τα πολύγωνα σχετικών ή αθροιστικών συχνοτήτων.

Παράδειγμα 3:

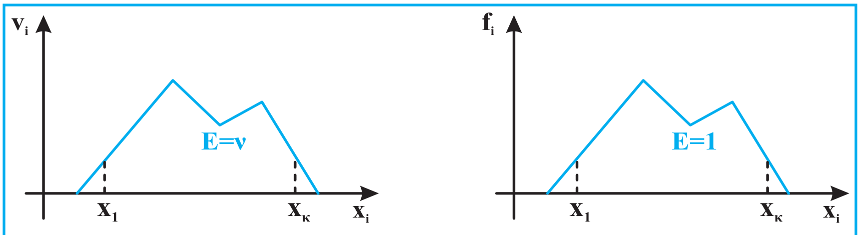
Το διάγραμμα συχνοτήτων και το πολύγωνο συχνοτήτων για τον αριθμό παιδιών του παραδείγματος 1 είναι:



Παρατήρηση:

Ενώνοντας τα άκρα του πολυγώνου με δυο υποθετικές τιμές $υ_1$, $υ_2$ συχνότητας 0, εκατέρωθεν των πραγματικών πάνω στον οριζόντιο άξονα, σχηματίζεται μια κλειστή πολυγωνική επιφάνεια με εμβαδό:

- Ίσο με το μέγεθος του δείγματος για πολύγωνο απολύτων συχνοτήτων.



x_1,$x_κ$: ακραίες παρατηρήσεις

- Ίσο με 1 για πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων.

2. Ραβδόγραμμα (BARCHART)

Χρησιμοποιείται : Για ποιοτικές μεταβλητές.

Κατασκευή:

Χαράζουμε δύο κάθετους άξονες.

Στον οριζόντιο άξονα τοποθετούμε τις τιμές της μεταβλητής.

Στον κατακόρυφο άξονα κάνουμε μια αρίθμηση στην οποία αντιστοιχούμε :

- την (απόλυτη) συχνότητα για ραβδόγραμμα (απόλυτων) συχνοτήτων.
- την σχετική συχνότητα (συνήθως επί τοις εκατό) για ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων.

Κατασκευάζουμε ορθογώνια (ράβδους) για κάθε μια τιμή, έτσι ώστε :

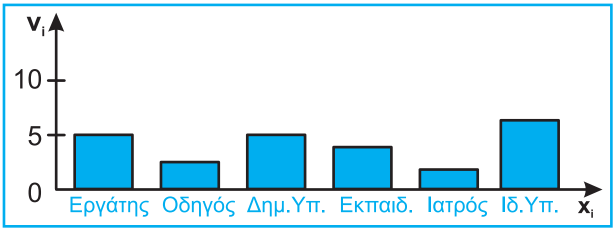
- Κάθε ορθογώνιο να έχει το ίδιο πλάτος με τα άλλα. Η επιλογή του πλάτους είναι αυθαίρετη.
- Τα ορθογώνια να μην είναι κολλημένα αλλά να απέχουν μεταξύ τους ίσες αποστάσεις.
- Το ύψος κάθε ορθογωνίου να ισούται με τη συχνότητα ή τη σχετική συχνότητα της τιμής που εκφράζει.

Παράδειγμα 4:
Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει τις απαντήσεις 25 ατόμων σχετικά με το επάγγελμά τους και τις αντίστοιχες συχνότητες.

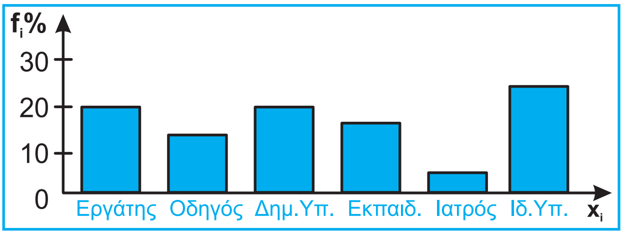
Επάγγελμα x_i	Συχνότητα v_i	Σχ.Συχνότητα f_i	Σχ.Συχνότητα f_i %
Εργάτης	5	0,20	20
Οδηγός	3	0,12	12
Δημ. Υπάλληλος	5	0,20	20
Εκπαιδευτικός	4	0,16	16
Ιατρός	2	0,08	8
Ιδ. Υπάλληλος	6	0,24	24
Σύνολο	25	1	100

Να κατασκευάσετε το ραβδόγραμμα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων %.

Το ραβδόγραμμα συχνοτήτων είναι το παρακάτω:

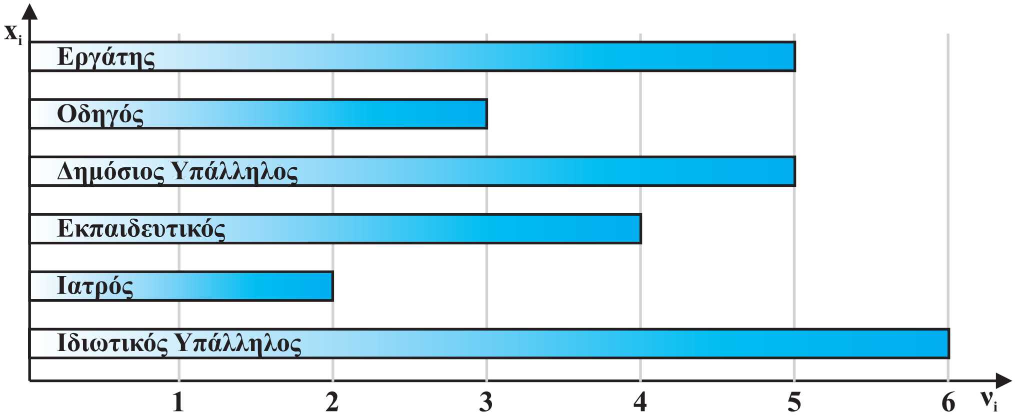


Το ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων % είναι το παρακάτω:



Παρατηρήσεις:

α) Είναι δυνατόν να αντιστρέψουμε τον ρόλο των αξόνων ώστε οι ράβδοι να είναι οριζόντιες.



β) Μπορούμε για ευκολότερη σύγκριση να κατασκευάσουμε στο ίδιο σύστημα αξόνων δυο ή περισσότερα ραβδογράμματα συχνοτήτων για το ίδιο μέγεθος δείγματος με ράβδους διαφορετικού χρώματος και "κολλημένες" μεταξύ τους για κάθε τιμή x_i.

3. Κυκλικό διάγραμμα (PIECHART)

Χρησιμοποιείται: Για όλες τις μεταβλητές όταν οι διάφορες τιμές που παίρνουν είναι σχετικά μικρού πλήθους.

Κατασκευή:

Χωρίζουμε έναν κύκλο σε κυκλικούς τομείς που αντιστοιχούν στις διάφορες τιμές x_i.

Η επίκεντρη γωνία $\hat{\omega}_i$ κάθε κυκλικού τομέα υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\hat{\omega}_i = \frac{v_i}{v} \cdot 360^0 \quad (5) \qquad\qquad \hat{\omega}_i = f_i \cdot 360^0 \quad (6)$$

Για την κατασκευή του μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη στήλη των συχνοτήτων ή τη στήλη των σχετικών συχνοτήτων.

Παρατήρηση:

Ο τύπος **(5)** είναι ακριβέστερος από τον **(6)** αφού ο τελευταίος δεν υπολογίζει με ακρίβεια τις επίκεντρες γωνίες όταν οι σχετικές συχνότητες έχουν υποστεί στρογγυλοποίηση.

Παράδειγμα 5:

Το κυκλικό διάγραμμα για τα επαγγέλματα του παραδείγματος 4 είναι το παρακάτω:



4. Σημειόγραμμα (DOT DIAGRAM)

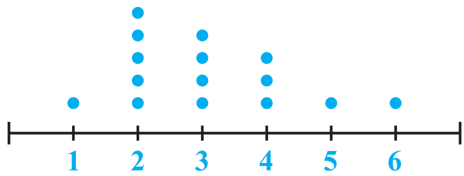
Χρησιμοποιείται: Για όλες τις μεταβλητές όταν το μέγεθος του δείγματος είναι μικρό (συνήθως μικρότερο του 20).

Κατασκευή:

Χαράζουμε έναν οριζόντιο άξονα στον οποίο τοποθετούμε όλες τις τιμές της μεταβλητής σε ίσες μεταξύ τους αποστάσεις.

Σε κάθε τιμή σημειώνουμε κατακόρυφα τόσες τελείες όσες και η συχνότητα της.

Παράδειγμα 6:
Ρωτήσαμε 15 μαθητές πόσες φορές απουσίασαν από το μάθημα το περασμένο τρίμηνο. Ο πίνακας συχνοτήτων και το αντίστοιχο σημειόγραμμα φαίνονται παρακάτω:

Αριθμός Απουσιών x_i	Συχνότητα v_i	Σημειόγραμμα
1	1	
2	5	
3	4	
4	3	
5	1	
6	1	
	Σύνολο: 15	

5. Χρονόγραμμα.

Χρησιμοποιείται: Για την παράσταση της εξέλιξης ενός μεγέθους σε σχέση με το χρόνο.

Κατασκευή:
Σε ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων τοποθετούμε στον οριζόντιο άξονα τις τιμές του χρόνου και στον κατακόρυφο βάζουμε μια αρίθμηση για τις τιμές του μεγέθους που μελετούμε.
Επίσης χαράζουμε βοηθητικές οριζόντιες και κατακόρυφες. Κατόπιν τοποθετούμε για κάθε χρονική στιγμή σημεία στο χρονόγραμμα όπως προκύπτουν από τα δεδομένα και τα ενώνουμε. Η πολυγωνική γραμμή που σχηματίζεται είναι το χρονόγραμμα.

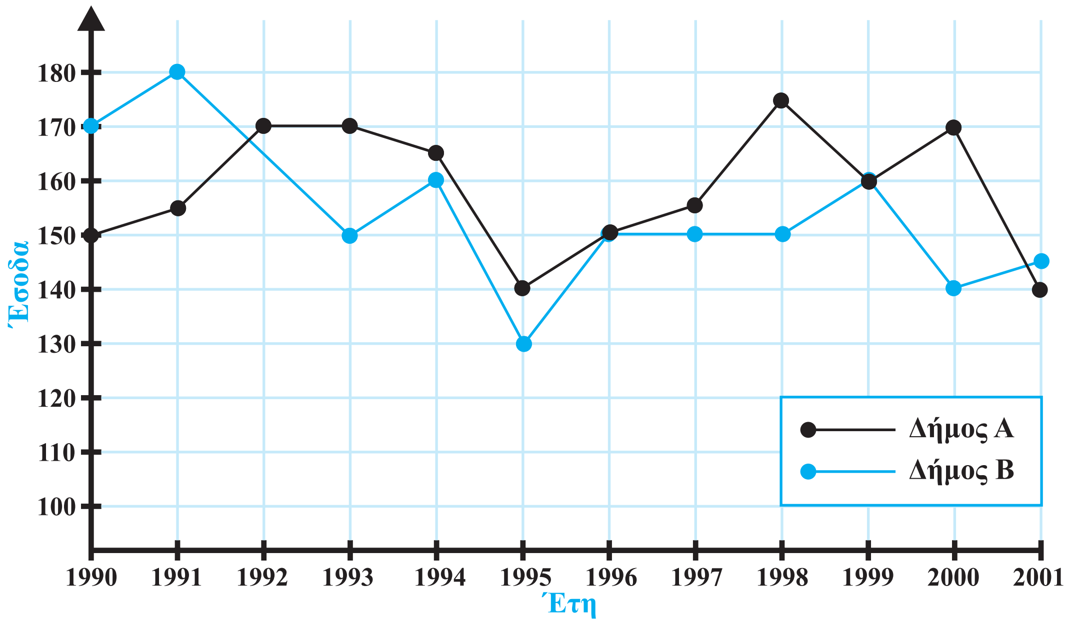
Παρατηρήσεις:
1. **Συνήθως χαράζουμε στο ίδιο σύστημα τα χρονογράμματα δύο ή περισσοτέρων μεγεθών για να γίνεται σύγκριση.**

2. **Η αρίθμηση του κατακόρυφου άξονα μπορεί να είναι ανεξάρτητη από την αρχή των αξόνων.**

Παράδειγμα 7:
Τα έσοδα δυο δήμων Α και Β (σε χιλιάδες ευρώ) για τα έτη 1990 – 2001 φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

ΕΤΗ:	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
ΔΗΜΟΣ Α:	150	155	170	170	165	140	150	155	175	160	170	140
ΔΗΜΟΣ Β:	170	180	170	150	160	130	150	150	150	160	140	145

Λύση:
Το χρονόγραμμα εσόδων των δυο δήμων είναι:



Θεωρία 4

Τι είναι η ομαδοποίηση των παρατηρήσεων και πώς γίνεται;

Ομαδοποίηση των παρατηρήσεων πραγματοποιείται όταν το πλήθος των τιμών x_i είναι μεγάλο ενω οι αντίστοιχες συχνότητες είναι πολύ μικρές. Στην ομαδοποίηση χωρίζουμε τις τιμές των παρατηρήσεων σε ομάδες (κλάσεις) και ταξινομούμε σε αυτές όλες τις τιμές.
Η ομαδοποίηση γίνεται ως εξής:

1. Βρίσκουμε στο σύνολο των τιμών των παρατηρήσεωντις ακραίες τιμές δηλαδή την ελάχιστη x_{min} και τη μέγιστη x_{max}. Κατόπιν υπολογίζω το **εύρος (Range) του δείγματος:** $R = x_{max} - x_{min}$.

2. Υπολογίζουμε το πλήθος των κλάσεων που θα σχηματίσουμε από τον εμπειρικό τύπο του Sturges:

$$q = 1 + 3,32\log_{10} n \quad (6)$$

όπου q είναι ο αριθμός των κλάσεων και n το μέγεθος του δείγματος. Από τον τύπο του Sturges προκύπτει ο παρακάτω πίνακας

Μέγεθος Δείγματος	Αριθμός κλάσεων	Μέγεθος Δείγματος	Αριθμός κλάσεων
<20	5	200 - 400	9
20 - 50	6	400 - 700	10
50 - 100	7	700 - 1000	11
100 - 200	8	≥1000	12

3. Υπολογίζουμε το πλάτος **c** των κλάσεων διαιρών-τας το εύρος **R** με τον αριθμό των κλάσεων **q** δηλαδή:

$$c = \frac{R}{q} \quad (7)$$

Παρατήρηση:
Συνήθως σαν πλάτος των κλά-σεων παίρνουμε ένα αριθμό λίγο μεγαλύ-τερο από το λόγο R/q έτσι ώστε η X_{max} να μη συμπίπτει με το δεξιό άκρο της τελευταίας κλάσης.

4. Αρχίζουμε την κατασκευή των κλάσεων ξεκινώντας από την X_{min} προσθέτοντας κάθε φορά τον αριθμό c που υπολογίσαμε πριν. Το δεξιό άκρο κάθε κλάσης θα είναι το αριστερό της επόμενης π.χ. [5 – 10), [10 – 15), [15 – 20), κ.λ.π. Με αυτό το τρόπο αποφεύγεται σαν αυτή της παρατήρησης α) που ακολουθεί.

Παρατηρήσεις:

α) Ο τρόπος κατασκευής των κλάσεων όπως αναφέρθηκε πιο πάνω δεν είναι υποχρεωτικός. Μπορούμε να κατασκευάσουμε τις κλάσεις και ως εξής : 5 – 9, 10 – 14, 15 – 19, κ.λ.π. εφόσον είμαστε σίγουροι ότι **δεν θα βρεθεί κάποια τιμή των παρατηρήσεων που δεν ανήκει σε καμμία κλάση** π.χ. x = 14,8.

β) Σε κάποιες περιπτώσεις ζητείται να ομαδοποίησουμε τις παρατηρήσεις μας **με δεδομένο το πλάτος των κλάσεων.** Σε αυτές τις περιπτώσεις αρχίζουμε την κατασκευή των κλάσεων από την X_{min} και κατασκευάζουμε τόσες κλάσεις όσες χρειάζονται για να υπερβούμε την X_{max}.

γ) Για τα ίδια δεδομένα, το πλάτος και ο τρόπος κατασκευής των κλάσεων μπορεί να διαφέρει. Πρέπει να θυμόμαστε πάντα ότι:

Σωστή ομαδοποίηση έχει γίνει όταν:

1. Η μικρότερη παρατήρηση βρίσκεται στην πρώτη κλάση.
2. Η μεγαλύτερη παρατήρηση βρίσκεται στην τελευταία κλάση.
3. Δεν υπάρχει καμμία τιμή των παρατηρήσεων εκτός κλάσεων.

Θεωρία 5

Πως κατασκευάζονται οι πίνακες κατανομής συχνοτήτων στην ομαδοποίηση;

Οι πίνακες κατανομής συχνοτήτων στην ομαδοποίηση δεν διαφέρουν πολύ από τους πίνακες που περιγράψαμε στα προηγούμενα. Στην πρώτη στήλη αναγράφουμε όλες τις κλάσεις. Στην επόμενη στήλη αναγράφουμε τις **κεντρικές τιμές** των κλάσεων. Η κεντρική τιμή x_i κάθε κλάσης υπολογίζεται από τον τύπο:

Παρατήρηση:
Η διαφορά δυο διαδοχικών κεντρικών τιμών ισούται με το πλάτος των κλάσεων.

$$x_i = \frac{\text{άνω όριο κλάσης} + \text{κάτω όριο κλάσης}}{2} \quad (8)$$

Στην επόμενη στήλη αναγράφουμε τις συχνότητες της κάθε κλάσης. Οι κλάσεις όπως αναφέραμε είναι διαστήματα της μορφής [,). Αυτό σημαίνει ότι μια τιμή που ισούται με το άνω όριο της κλάσης θα κατανέμεται στην επόμενη. Οι επόμενες στήλες της σχετικής και αθροιστικής συχνότητας συμπληρώνονται κατά τα γνωστά.

Παράδειγμα 8:

Έστω ο πίνακας:

Πίνακας 1

Ύψος 50 παιδιών της Γ΄τάξης ενός Λυκείου σε cm.

156	178	169	164	170	172	183	194	186	175	184	167	163	159	178	180	191	168
155	187	168	168	190	176	179	182	168	191	170	180	182	176	183	185	193	175
179	168	190	179	187	191	187	186	167	187	190	175	169	171				

Να γίνει ομαδοποίηση σε κατάλληλο αριθμό κλάσεων.

Εχουμε: $X_{min} = 153$, $X_{max} = 194$ άρα: $R = 194 - 153 = 41$

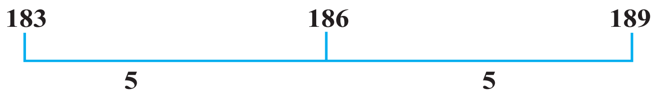
Θα ομαδοποιήσουμε σε 7 κλάσεις άρα: $q = 7$, άρα $c = 6$

Ο πίνακας συχνοτήτων και αθροιστικών συχνοτήτων του πίνακα 1 θα είναι:

α/α	Κλάσεις	Κεντ. τιμες x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική Συχνότητα f_i	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Αθρ. Σχ. Συχνότητα F_i
1	153-159	156	2	0,04	2	0,04
2	159-165	162	3	0,06	5	0,10
3	165-171	168	11	0,22	16	0,32
4	171-177	174	7	0,14	23	0,46
5	177-183	180	9	0,18	32	0,64
6	183-189	186	10	0,20	42	0,84
7	189-195	192	8	0,16	50	1,00
		Σύνολο:	50	1,00		

Παρατήρηση:

Στην ομαδοποίηση θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις σε κάθε κλάση **κατανέμονται ομοιόμορφα.** Αυτό σημαίνει ότι π.χ. από τα 10 άτομα της 6ης κλάσης του προηγούμενου παραδείγματος θεωρούμε ότι τα 5 έχουν ύψος μικρότερο ή ίσο της κεντρικής τιμής.



Η υπόθεση αυτή είναι εσφαλμένη ωστόσο η αξία της ομαδοποίησης είναι μεγάλη αφού κερδίζουμε σε χρόνο. Η επιλογή του πλήθους και του πλάτους των κλάσεων σε μια ομαδοποίηση μπορεί να είναι αυθαίρετη, ακολουθώντας όμως τους παραπάνω κανόνες προκύπτει μικρότερο σφάλμα.

Θεωρία 6

Ποια διαγράμματα χρησιμοποιούνται στην ομαδοποίηση;

Στην ομαδοποίηση χρησιμοποιούνται τα **ιστογράμματα συχνοτήτων.**

Κατασκευή:

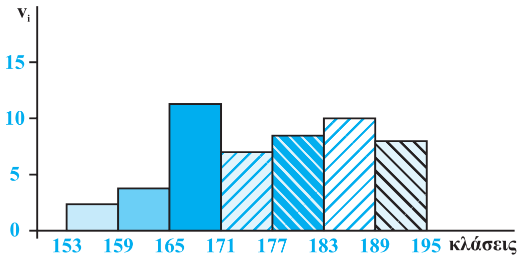
Χαράζουμε δύο κάθετους άξονες. Στον οριζόντιο άξονα τοποθετούμε τα όρια των κλάσεων σε ίσες αποστάσεις και στον κατακόρυφο άξονα φτιάχνουμε μια αρίθμηση που αφορά:

α) τις απόλυτες συχνότητες για ιστόγραμμα συχνοτήτων
β) τις σχετικές συχνότητες για ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων
γ) τις αθροιστικές συχνότητες για ιστόγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων
δ) τις αθροιστικές σχετικές συχνότητες για ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.

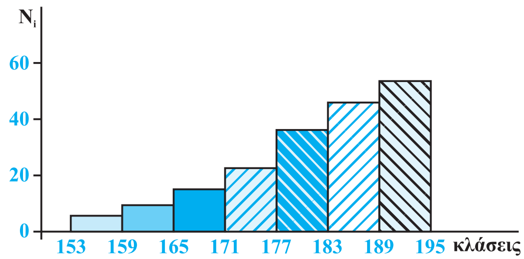
Για κάθε κλάση κατασκευάζουμε ένα ορθογώνιο, έτσι ώστε το ύψος του να ισούται με τη συχνότητα της κλάσης. Τις τιμές των συχνοτήτων τις παίρνουμε από την αντίστοιχη στήλη του πίνακα συχνοτήτων.
Ολα τα ορθογώνια είναι “κολλημένα” μεταξύ τους.

Παράδειγμα 9:

Το ιστόγραμμα συχνοτήτων του παραδείγματος 8 είναι:



Το ιστόγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων του παραδείγματος 8 είναι:



Θεωρία 7

α) Πώς κατασκευάζονται τα πολύγωνα συχνοτήτων στα ομαδοποιημένα δεδομένα;
β) Τι είναι καμπύλη συχνοτήτων;

α) Ανάλογα με το ιστόγραμμα έχουμε:

- πολύγωνο συχνοτήτων
- πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων
- πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων
- πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.

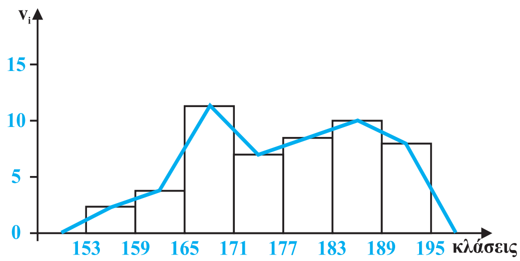
Κατασκευή:

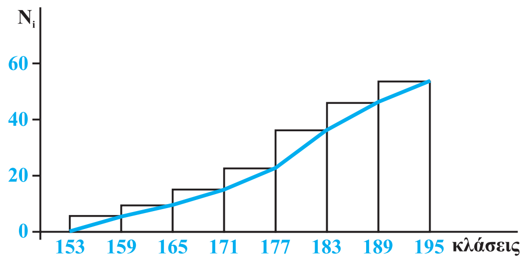
Για να τα σχηματίσουμε κάνουμε τα εξής:

- Στο ιστόγραμμα συχνοτήτων και στο ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων θεωρούμε δύο ακόμη κλάσεις εκατέρωθεν των ακραίων με συχνότητα 0. Ενώνοντας τα μέσα των άνω βάσεων όλων των ορθογωνίων σχηματίζεται το πολύγωνο συχνοτήτων.
- Στο ιστόγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων και στο ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων ενώνουμε τα δεξιά άκρα όλων των άνω βάσεων και σχηματίζεται το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων.

Παράδειγμα 10:

Το πολύγωνο συχνοτήτων και αθροιστικών συχνοτήτων του παραδείγματος 9 είναι:





Σε περίπτωση συνεχούς μεταβλητής για μεγάλο αριθμό κλάσεων $(q \to +\infty)$ και για πολύ μικρά πλάτη $(c \to 0)$ η πολυγωνική γραμμή προσεγγίζει μια καμπύλη που ονομάζεται **καμπύλη συχνοτήτων.**

Ανάλογα με τη μορφή της καμπύλης διακρίνουμε διάφορες κατανομές συχνοτήτων όπως:

- **την ομοιόμορφη.** (Σχ. 1)
- **την ασύμμετρη με θετική ασυμμετρία.** (Σχ. 3)
- **την κανονική.** (Σχ. 2)
- **την ασύμμετρη με αρνητική ασυμμετρία.** (Σχ. 4)



(1) (2) (3) (4)

Θεωρία 8

α) Μπορούμε να κάνουμε ομαδοποίηση με κλάσεις άνισου πλάτους και πότε συμβαίνει αυτό;
β) Πως κατασκευάζονται τα ιστογράμματα όταν έχουμε κλάσεις άνισου πλάτους;

α) Οταν μια κλάση έχει πολύ μικρότερη συχνότητα συγκριτικά με τις άλλες τότε μπορούμε να την “ενώσουμε” με μια από τις αμέσως διπλανές και να κατασκευάσουμε μια κλάση διπλάσιου πλάτους. Γενικά μπορούμε να ομαδοποιούμε τα δεδομένα σε κλάσεις άνισου πλάτους ανάλογα με την περίπτωση.

Παράδειγμα 11:
Εστω η παρακάτω κατανομή συχνοτήτων που αφορά τις διάρκειες (σε min) των 100 πιο πρόσφατων τηλεφωνικών συνδιαλέξεων που πραγματοποιήθηκαν από ένα συνδρομητή.

α/α	Κλάσεις	Συχνότητα
1	1 - 6	12
2	6 -11	20
3	11 - 16	30
4	16 - 21	4
5	21 - 26	18
6	26 - 31	16
	Σύνολο:	100

Παρατηρούμε ότι η 4η κλάση έχει πολύ μικρή συχνότητα. Έτσι ομαδοποιούμε σε άνισες κλάσεις ως εξής:

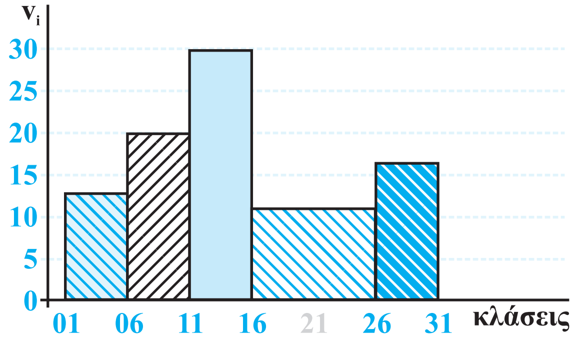
α/α	Κλάσεις	Συχνότητα
1	1 - 6	12
2	6 -11	20
3	11 - 16	30
4	16 - 26	22
6	26 - 31	16
	Σύνολο:	100

β) Η κατασκευή των ιστογραμμάτων σε ομαδοποιημένα δεδομένα με κλάσεις άνισου πλάτους είναι η ίδια με τη διαφορά ότι **το εμβαδό** κάθε ορθογωνίου πρέπει να ισούται με την συχνότητα της κλάσης που αντιπροσωπεύει. Ετσι το ύψος υ κάθε ορθογωνίου θα υπολογίζεται ως εξής:

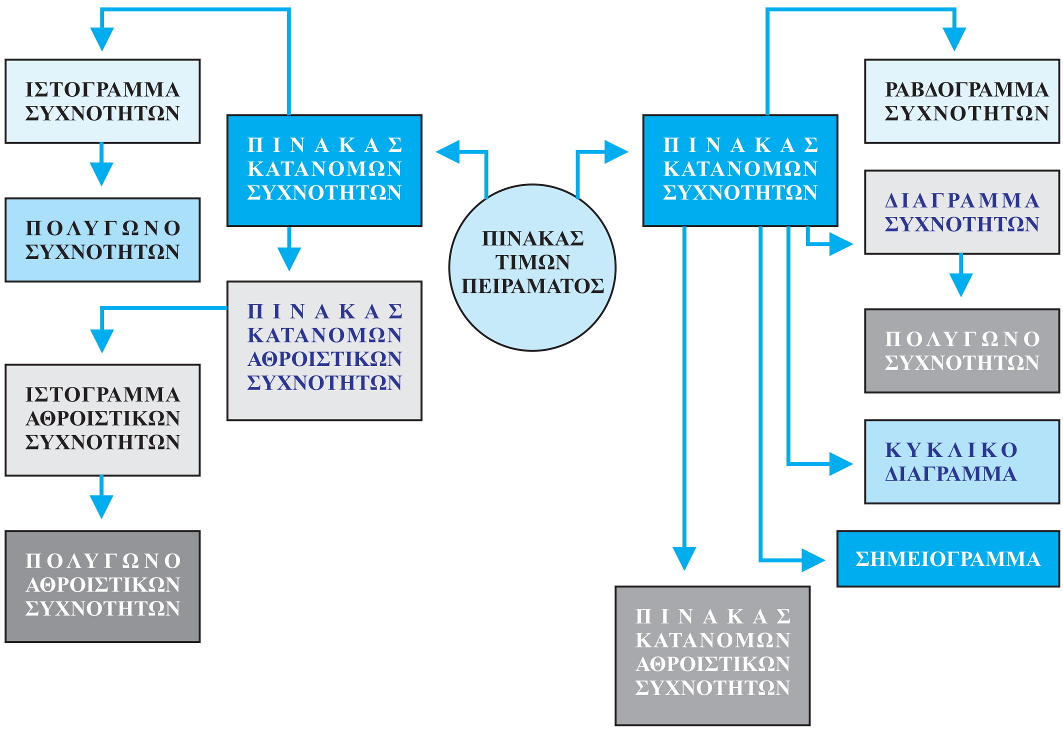
$$u_i = \frac{f_i\%}{c_i} \quad (9)$$

Παράδειγμα 12:

Το ιστόγραμμα συχνοτήτων του παραδείγματος 11 είναι:



Ομαδοποιημένα δεδομένα: **Μη Ομαδοποιημένα δεδομένα:**



Λυμένες Ασκήσεις.

1. **Οι παρακάτω αριθμοί είναι οι ημέρες απουσίας λόγω ασθένειας 50 υπαλλήλων κατά τη διάρκεια ενός έτους.**

2	4	8	5	6	1	8	1	1	6
6	8	2	9	1	2	2	2	7	1
4	2	5	4	6	9	9	1	5	7
1	1	3	6	4	7	1	2	2	2
8	3	7	1	1	2	6	4	7	6

Να κατασκευάσετε:
α) τους πίνακες συχνοτήτων και αθροιστικών συχνοτήτων.
β) να βρεθεί το ποσοστό των υπαλλήλων που απουσίασαν:
ι) τουλάχιστον 7 ημέρες. **ιι) το πολύ 5 ημέρες.** **ιιι) από 5 εως και 8 ημέρες.**
γ) το διάγραμμα συχνοτήτων.

Λύση:

α) Οι πίνακες συχνοτήτων και αθροιστικών συχνοτήτων είναι:

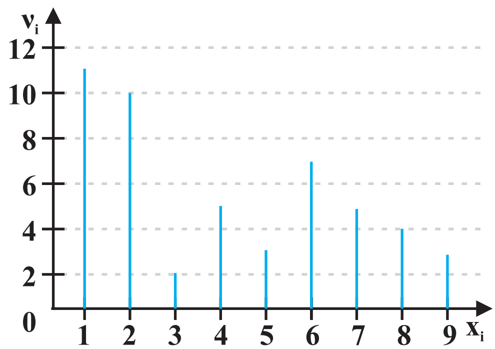
x_i	v_i	f_i	$f_i\%$	N_i	F_i	$F_i\%$
1	11	0,22	22	11	0,22	22
2	10	0,2	20	21	0,42	42
3	2	0,04	4	23	0,46	46
4	5	0,1	10	28	0,56	56
5	3	0,06	6	31	0,62	62
6	7	0,14	14	38	0,76	76
7	5	0,1	10	43	0,86	86
8	4	0,08	8	47	0,94	94
9	3	0,06	6	50	1,00	100
Σύνολο	50	1,00	100			

β) **ι)** $v - N_6 = 50 - 38 = 12$

ιι) $N_5 = 31$

ιιι) $N_8 - N_4 = 47 - 28 = 19$

γ) το διάγραμμα συχνοτήτων είναι:



2. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων για τις μουσικές προτιμήσεις 80 ατόμων και να κάνετε το ραβδόγραμμα συχνοτήτων.

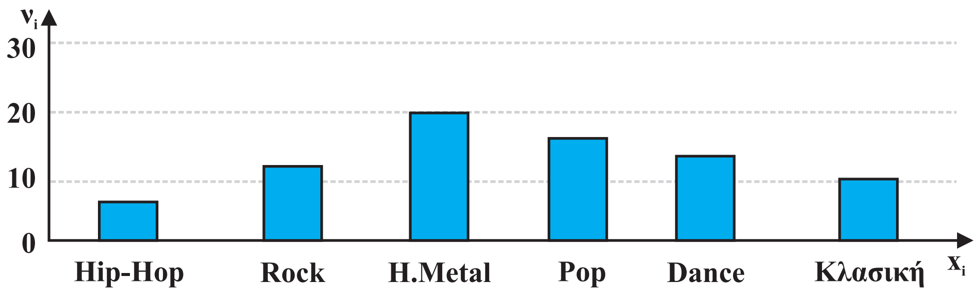
Μουσική x_i	v_i	f_i	f_i %
Hip Hop	8		
Rock	12		
Heavy Metal	20		
Pop	16		
Dance	14		
Κλασική	10		
Σύνολο			

Λύση:

Εχουμε:

Μουσική x_i	v_i	f_i	f_i %
Hip Hop	8	0,1	10
Rock	12	0,15	15
Heavy Metal	20	0,25	25
Pop	16	0,2	20
Dance	14	0,175	17,5
Κλασική	10	0,125	12,5
Σύνολο	80	1,00	100

Το ραβδόγραμμα των συχνοτήτων είναι το παρακάτω



3. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

x_i	v_i	f_i	N_i	F_i	$f_i\%$	$F_i\%$
1					10	
2			16			
3						50
4						
5	4		50			
Σύνολο:						

Λύση:

Εχουμε: $v = N_5 = 50$

$f_1 = \dfrac{f_1\%}{100} = 0,1 = F_1$ άρα: $v_1 = f_1 \cdot 50 = 5 = N_1$

$v_2 = N_2 - N_1 = 16 - 5 = 11$ άρα: $f_2 = \dfrac{v_2}{v} = \dfrac{11}{50} = 0,22$ και $F_2 = f_2 + f_1 = 0,22 + 0,1 = 0,32$

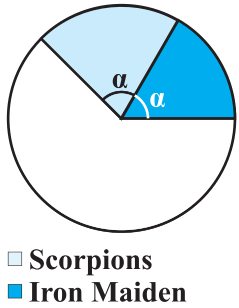
$F_3 = \dfrac{F_3\%}{100} = \dfrac{50}{100} = 0,5$ άρα: $f_3 = F_3 - F_2 = 0,5 - 0,32 = 0,18$,άρα: $v_3 = f_3 \cdot v = 0,18 \cdot 50 = 9$

$v_4 = v - (v_1 + v_2 + v_3 + v_5) = 50 - 29 = 21$

x_i	v_i	f_i	N_i	F_i	$f_i\%$	$F_i\%$
1	5	0,1	5	0,1	10	10
2	11	0,22	16	0,32	22	32
3	9	0,18	25	0,5	18	50
4	21	0,42	46	0,92	42	92
5	4	0,08	50	1,00	8	100
Σύνολο:	50	1,00			100	

4. α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα για τα δημοφιλέστερα μουσικά συγκροτήματα δεδομένου του κυκλικού διαγράμματος:

Μουσ. Συγκροτ.	Συχνότ. ν_i	Σχετ. Συχνότ. f_i %
Iron Maiden	40	
Iced Earth		50
Scorpions		
Metallica	200	



β) Να συμπληρωθεί το κυκλικό διάγραμμα και να γίνει το ραβδόγραμμα συχνοτήτων.

Λύση:

Από το κυκλικό διάγραμμα προκύπτει ότι: $\hat{\phi}_{I.M} = \hat{\phi}_{Sc} \Leftrightarrow \frac{\hat{\phi}_{I.M} \cdot \nu}{360} = \frac{\hat{\phi}_{Sc} \cdot \nu}{360} \Leftrightarrow \nu_{I.M.} = \nu_{Sc}$

Επίσης: $\nu_{I.E} = \frac{f_{I.E.} \cdot 200}{100} = 100$ και $\nu_{Met.} = \nu - (\nu_{I.M.} + \nu_{I.E.} + \nu_{Sc.}) = 200 - 180 = 20$

Άρα ο πίνακας συμπληρώνεται όπως φαίνεται παρακάτω

Μουσ. Συγκροτ.	Συχνότ. ν_i	Σχετ. Συχνότ. f_i %
Iron Maiden	40	20
Iced Earth	100	50
Scorpions	40	20
Metallica	20	10
	200	100

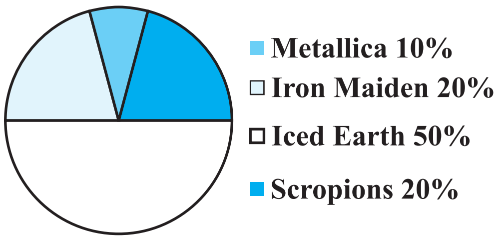
:

β) Για τη κατασκευή του προηγούμενου κυκλικού διαγράμματος έχουμε:

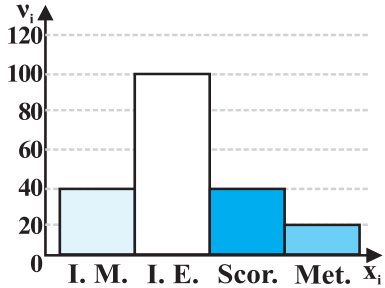
$\phi_{I.M.} = \phi_{Sc.} = 0{,}2 \cdot 360^\circ = 72^\circ$

$\hat{\phi}_{I.E.} = 0{,}5 \cdot 360^\circ = 180^\circ$

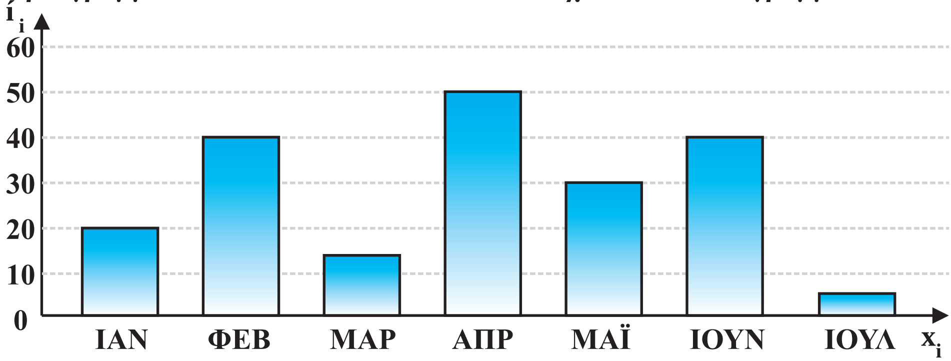
$\phi_{Met.} = 0{,}1 \cdot 360^\circ = 36^\circ$



Το ραβδόγραμμα συχνοτήτων είναι το διπλανό:



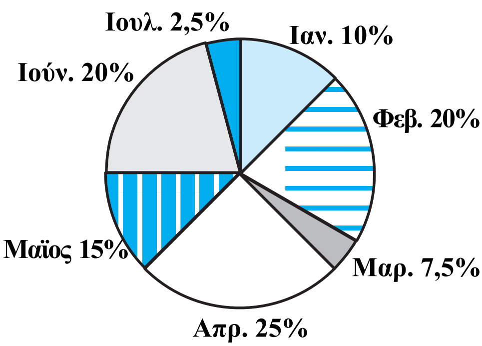
5. **Οι πωλήσεις σε χιλιάδες τεμάχια ενός προϊόντος φαίνονται στο παρακάτω ραβδόγραμμα. Να κατασκευάσετε το αντίστοιχο κυκλικό διάγραμμα.**



Λύση:

Κατασκευάζουμε τον παρακάτω βοηθητικό πίνακα. Το κυκλικό διάγραμμα φαίνεται δίπλα.

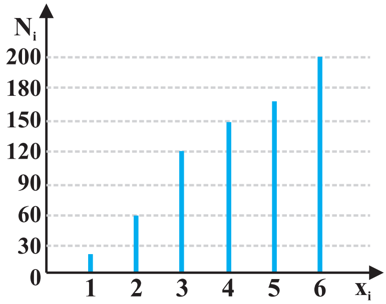
x_i	ν_i	f_i	$\varphi_i = f_i\, 360^o$
Ιανουάριος	20	0,1	36
Φεβρουάριος	40	0,2	72
Μάρτιος	15	0,075	27
Απρίλιος	50	0,25	90
Μαΐος	30	0,15	54
Ιούνιος	40	0,2	72
Ιούλιος	5	0,025	9
	200	1,000	360



6. Εστω το διπλανο διάγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων. Να κατασκευάσετε:

α) το διάγραμμα συχνοτήτων και το πολύγωνο συχνοτήτων.

β) το κυκλικό διάγραμμα.

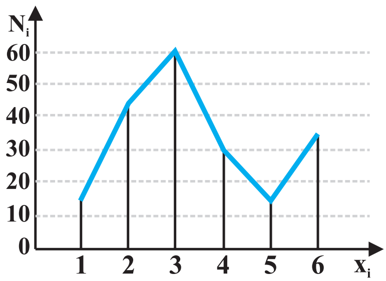


Λύση:

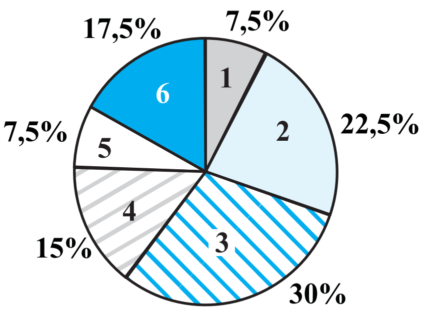
Συμπληρώνουμε τον διπλανό βοηθητικό πίνακα:

x_i	N_i	v_i	f_i	$\varphi_i = f_i 360^o$
1	15	15	0,075	27
2	60	45	0,225	81
3	120	60	0,3	108
4	150	30	0,15	54
5	165	15	0,075	27
6	200	35	0,175	63
		200	1	360

α) το διάγραμμα συχνοτήτων και το αντίστοιχο πολύγωνο είναι:



β) το κυκλικό διάγραμμα είναι:



7. Με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα αφού τον συμπληρώσετε να κατασκευάσετε

α) το κυκλικό διάγραμμα.

β) το ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων.

Τιμές x_i	Συχν. v_i	Γωνία φ_i
Α	20	36°
Β		
Γ		108°
Δ		72°

Λύση:

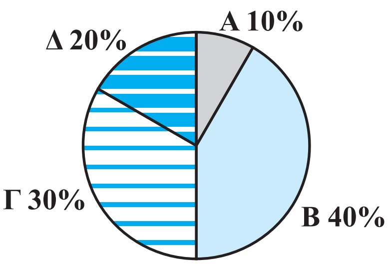
$v = \frac{v_A}{36}360 = 20 \cdot 10 = 200 \quad v_\Gamma = \frac{v}{360}108 = 60$

$v_\Delta = \frac{v}{360}72 = 40$

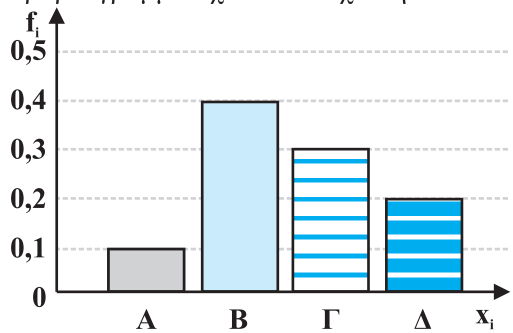
$v_B = v - (v_A + v_\Gamma + v_\Delta) = 200 - 120 = 80 \qquad \hat{\varphi}_B = \frac{80}{200}360^o = 144^o$

Τιμές x_i	Συχνότητα v_i	Σχ.Συχνότητα f_i	Γωνία φ_i
Α	20	0,1	36°
Β	80	0,4	144°
Γ	60	0,3	108°
Δ	40	0,2	72°
	200	1,0	360°

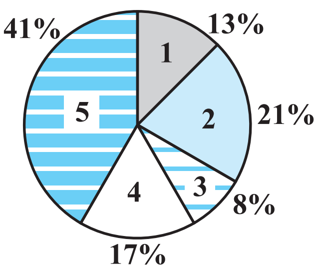
α) το κυκλικό διάγραμμα είναι:



β) το ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων είναι:



8. **Να κατασκευάσετε το πολύγωνο συχνοτήτων για τις τιμές 1,2,3,4,5 σε ένα δείγμα 500 παρατηρήσεων, δεδομένου του διπλανού κυκλικού διαγράμματος.**

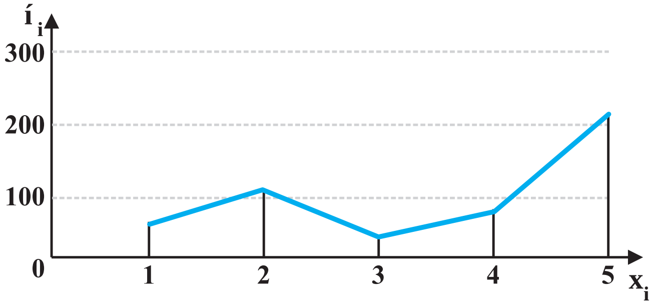


Λύση:

Ισχύει: $\frac{f_i\%}{100} = \frac{v_i}{v} \Leftrightarrow v_i = \frac{vf_i\%}{100}$

Άρα θα έχουμε τον πίνακα που ακολουθεί:

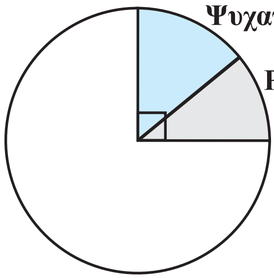
Το πολύγωνο συχνοτήτων είναι:



x_i	$f_i\%$	ν_i
1	13	65
2	21	105
3	8	40
4	17	85
5	41	205
	100	500

9. **Να συμπληρωθεί το κυκλικό διάγραμμα και ο πίνακας, ο οποίος παρουσιάζει τις δαπάνες μιας τετραμελούς οικογένειας σε ευρώ μηνιαίως:**

	Δαπάνες x_i	ν_i	f_i %
1	Ενοίκιο	300	
2	Φαγητό	700	
3	Ρουχισμός	200	
4	Ψυχαγωγία	250	
5	Λοιπά		
	Σύνολο		



Λύση:

Από το κυκλικό διάγραμμα φαίνεται ότι: $\nu_3 + \nu_4 = 0{,}25\nu \Leftrightarrow \nu = 450 \cdot 4 \Leftrightarrow \nu = 1800$

Επίσης: $\nu_5 = \nu - (\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4) = 1800 - 1450 = 350$

Δαπάνες x_i	ν_i	f_i %
Ενοίκιο	300	16,7
Φαγητό	700	38,9
Ρουχισμός	200	11,1
Ψυχαγωγία	250	13,9
Λοιπά	350	19,4
	1800	100,0

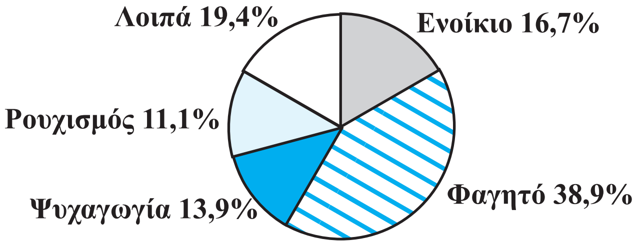
Επίσης: $\hat{\phi}_i = \frac{\nu_i}{1800} 360^o = \nu_i \cdot 0{,}2^o$

Αρα:

$\hat{\phi}_1 = 300 \cdot 0{,}2^o = 60^0$, $\hat{\phi}_2 = 700 \cdot 0{,}2^o = 140^0$, $\hat{\phi}_3 = 200 \cdot 0{,}2^o = 40^0$,

$\hat{\phi}_4 = 250 \cdot 0{,}2^o = 50^0$, $\hat{\phi}_5 = 350 \cdot 0{,}2^o = 70^0$

Το κυκλικό διάγραμμα είναι:

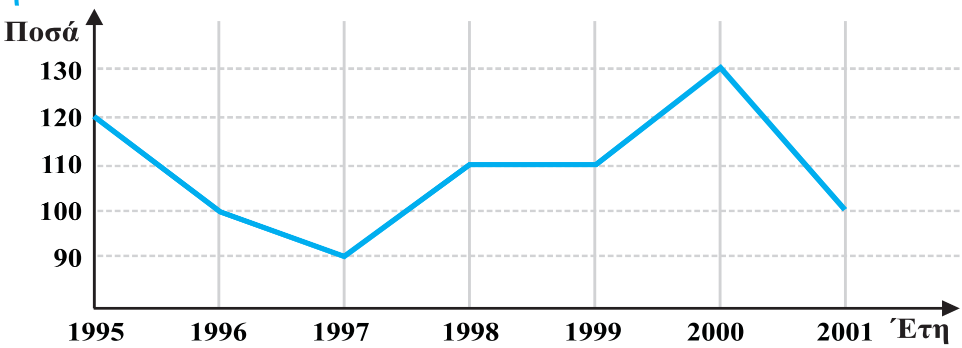


10. **Ενας Δήμος της Αττικής δαπάνησε για έργα τα παρακάτω ποσά (σε χιλιάδες ευρώ):**

Έτη:	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
Ποσά:	120	100	90	110	110	130	100

Να κατασκευασθεί το χρονόγραμμα δαπανών του Δήμου.

Λύση:



11. **Τα χρόνια υπηρεσίας 50 δημοσίων υπαλλήλων φαίνονται στον παρακάτω πίνακα**

2	8	5	15	9	16	9	12	3	15
7	6	3	11	2	12	9	17	8	13
22	1	4	14	13	10	14	18	12	21
8	5	11	9	8	6	13	12	10	16
15	3	18	25	10	10	10	13	28	27

α) Να ομαδοποιήσετε τις ηλικίες αυτές σε 7 κλάσεις ίσου πλάτους και να κάνετε τον πίνακα συχνοτήτων και αθροιστικών συχνοτήτων.

β) Να κανετε το ιστόγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων των ετών υπηρεσίας.

γ) Να βρείτε πόσοι υπάλληλοι εργάζονται στην υπηρεσία:

i) Περισσότερο από 14 χρόνια ii) Λιγότερο από 18 χρόνια.

Λύση:

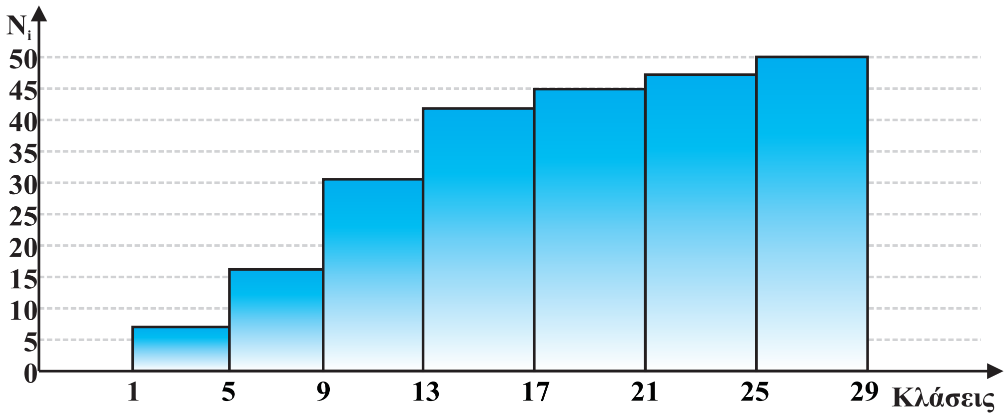
α) Εχουμε: $x_{max} = 28$, $x_{min} = 1$, άρα: $R = 28 - 1 = 27$

$$\frac{R}{\kappa} = \frac{27}{7} \approx 3{,}86, \text{ άρα } c = 4$$

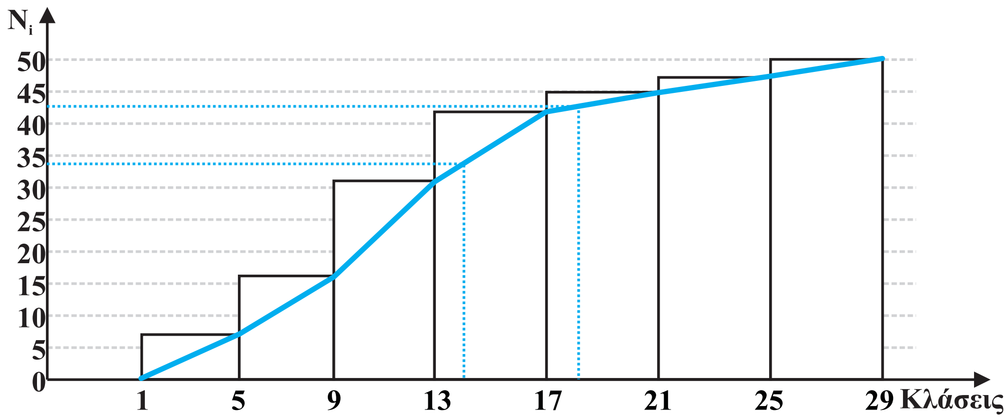
Ο πίνακας συχνοτήτων είναι:

Κλάσεις	x_i	v_i	f_i	$f_i\%$	N_i	F_i	$F_i\%$
1-5	3	7	0,14	14	7	0,14	14
5-9	7	9	0,18	18	16	0,32	32
9-13	11	15	0,30	30	31	0,62	62
13-17	15	11	0,22	22	42	0,84	84
17-21	19	3	0,06	6	45	0,90	90
21-25	23	2	0,04	4	47	0,94	94
25-29	27	3	0,06	6	50	1,00	100
		50	1,00	100			

β) Το ιστόγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων είναι:



γ) Από το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων με γραφική επίλυση έχουμε:



i) Περισσότερο από 14 χρόνια εργάζονται περίπου 50 – 34 = 16 υπάλληλοι

ii) Λιγότερο από 18 χρόνια εργάζονται περίπου 43 υπάλληλοι.

12. **Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει τη μέση διάρκεια τηλεφωνικών συνδιαλέξεων (σε min) 100 συνδρομητών.**

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

Μέση διάρκεια συνδιάλεξης	ν_i	f_i	N_i	F_i
1 - 6	8			
6 - 11	12			
11 - 16	20			
16 - 21	26			
21 - 26	18			
26 - 31	16			
	100			

β) Να κάνετε: ι) Το ιστόγραμμα συχνοτήτων

ιι) Το ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων

γ) Να βρείτε το ποσοστό των συνδρομητών με χρονική διάρκεια συνδιαλέξεων

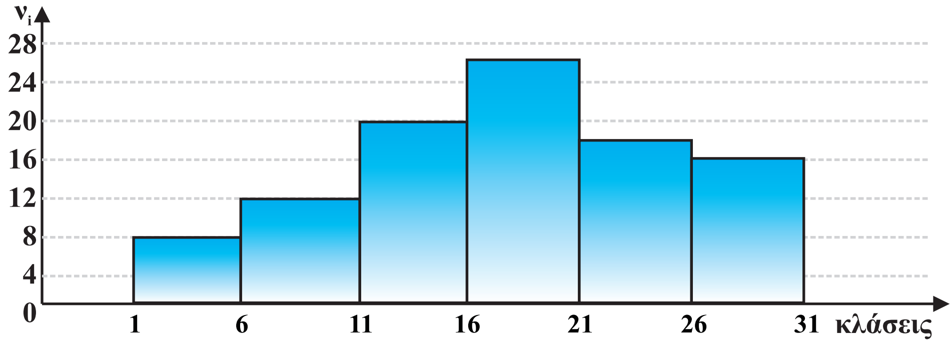
ι) Μέχρι 8,5 min ιι) Από 8,5 εως 18,5 min ιιι) Από 9 εως 19 min.

Λύση:

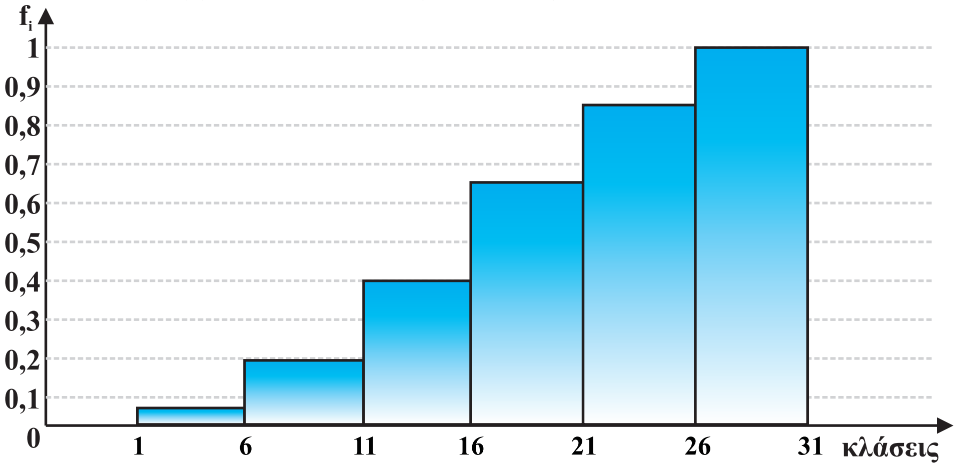
α) Ο πίνακας είναι ο ακόλουθος:

Μέση διάρκεια συνδιάλεξης	ν_i	f_i	N_i	F_i
1 - 6	8	0,08	8	0,08
6 -11	12	0,12	20	0,20
11 - 16	20	0,20	40	0,40
16 - 21	26	0,26	66	0,66
21 - 26	18	0,18	84	0,84
26 - 31	16	0,16	100	1,00
	100	1,00		

β) Το ιστόγραμμα συχνοτήτων είναι:



ιι) Το ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων είναι:

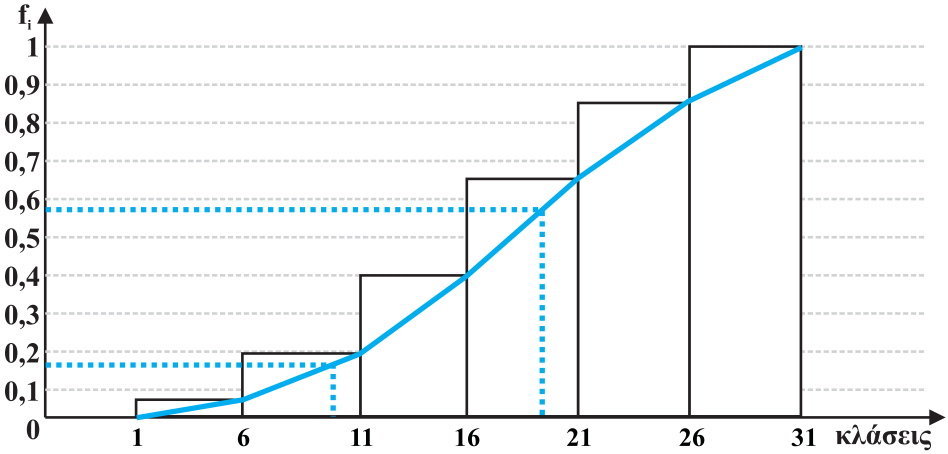


γ) ι) Επειδή η κεντρική τιμή της δεύτερης κλάσης είναι 8,5 το ποσοστό των συνδρομητών με διάρκειες συνδιαλέξεων μέχρι 8,5 min θα είναι: $v_1 + \frac{v_2}{2} = 8 + \frac{12}{2} = 14 = 14\%$

ιι) Ομοίως, η κεντρική τιμή της τέταρτης κλάσης είναι 18,5 άρα το ποσοστό των συνδρομητών με διάρκειες συνδιαλέξεων από 8,5 μέχρι 18,5min θα είναι:

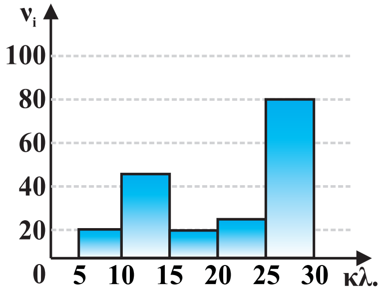
$$\left(N_3 + \frac{v_4}{2}\right) - \left(v_1 + \frac{v_2}{2}\right) = 40 + \frac{26}{2} - 14 = 19 = 39\%$$

ιιι) Το ποσοστό των συνδρομητών με διάρκεια συνδιαλέξεων από 9 εως 19 min θα βρεθεί με γραφική επίλυση στο πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.



Άρα το ποσοστό είναι περίπου 58% - 18% = 40%

13. Για το παρακάτω ιστόγραμμα συχνοτήτων να κατασκευάσετε:



α) τον πίνακα συχνοτήτων και αθροιστικών συχνοτήτων.

β) το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων.

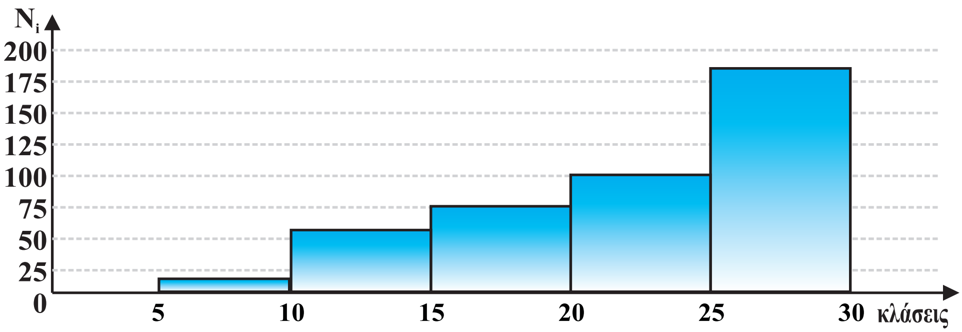
γ) να υπολογίσετε γραφικά μέχρι ποια τιμή περίπου φτάνουν οι 40 πρώτες παρατηρήσεις.

Λύση:

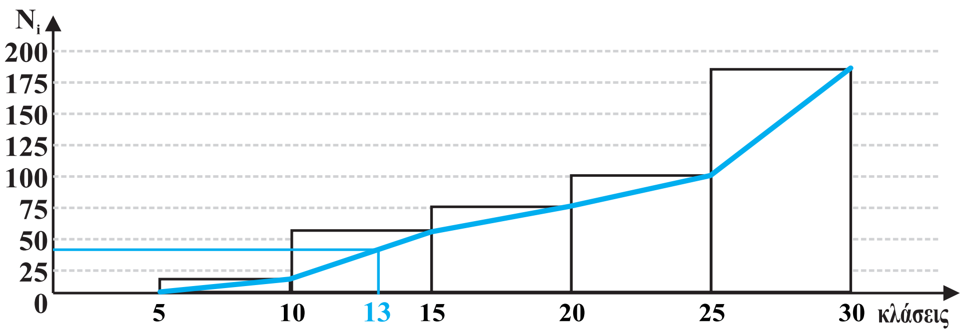
α) Ο πίνακας συχνοτήτων και αθροιστικών συχνοτήτων είναι:

Α/α	Κλάσεις	Κεντρικές τιμές x_i	Συχνότητα ν_i	Σχετ. Συχν. f_i	Αθρ. Συχνότ. N_i	Αθρ. Σχ. Συχνότ. F_i
1	5 - 10	7,5	20	0,111	20	0,111
2	10 - 15	12,5	35	0,195	55	0,306
3	15 - 20	17,5	20	0,111	75	0,417
4	20 - 25	22,5	25	0,139	100	0,556
5	25 - 30	27,5	80	0,444	180	1,000
		Σύνολο	180	1,000		

β) Κατασκευάζουμε το ιστόγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων. Το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων είναι:



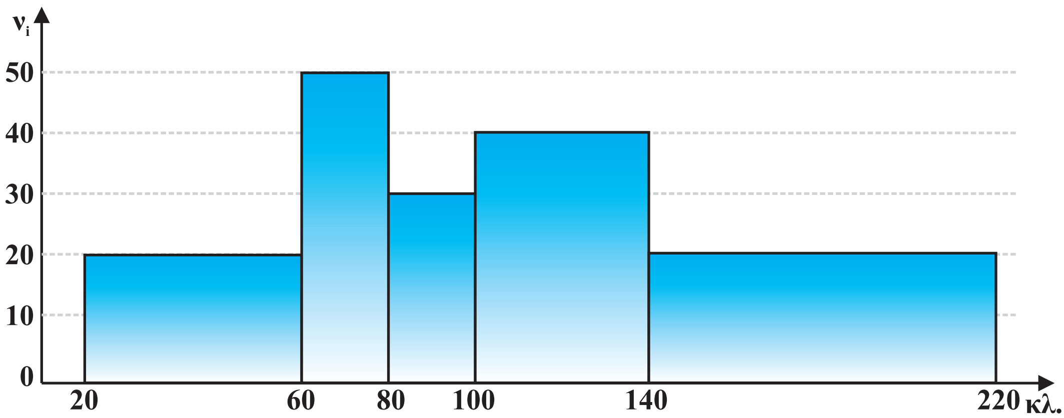
γ) Οι 40 πρώτες παρατηρήσεις φτάνουν περίπου μέχρι το 12 όπως φαίνεται γραφικά στο παρακάτω ιστόγραμμα:



14. Σε δείγμα 200 μαθητών χρονομετρήσαμε την ταχύτητά τους στην επίλυση μιας άσκησης. Ο πίνακας συχνοτήτων που δημιουργήσαμε είναι ο διπλανός:
Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων.

Χρόνος επίλυσης (sec)	Συχνότητα ν_i
20 - 60	40
60 - 80	50
80 - 100	30
100 - 140	80
140 - 220	80
Σύνολο:	280

Λύση:
Το ιστόγραμμα συχνοτήτων είναι το ακόλουθο:



Ερωτήσεις Σωστό – Λάθος.

1) Συχνότητα v_i της τιμής x_i μιας μεταβλητής Χ είναι ο φυσικός αριθμός, που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή x_i της μεταβλητής αυτής στο σύνολο των παρατηρήσεων. ( )

2) Για τη σχετική συχνότητα f_i της μεταβλητής x_i ισχύει: $0 < f_i < 1$. ( )

3) Το άθροισμα όλων των συχνοτήτων v_i ισούται με το μέγεθος του δείγματος. ( )

4) Η αθροιστική συχνότητα N_i υπολογίζεται μόνο σε περιπτώσεις διακριτών ποσοτικών μεταβλητών. ( )

5) Η συχνότητα v_i της τιμής x_i μιας μεταβλητής Χ είναι αρνητικός αριθμός. ( )

6) Αν διαιρέσουμε τη συχνότητα v_i μιας μεταβλητής Χ με το μέγεθος ν του δείγματος, προκύπτει η σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i. ( )

7) Το άθροισμα όλων των σχετικών συχνοτήτων f_i μιας κατανομής είναι ίσο με το μέγεθος ν του δείγματος. ( )

8) Το σύνολο των ζευγών (x_i, f_i) όπου f_i η σχετική συχνότητα της τιμής x_i, αποτελεί την κατανομή των σχετικών συχνοτήτων. ( )

9) Οι αθροιστικές συχνότητες N_i και οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες F_i μιας κατανομής χρησιμοποιούνται στην περίπτωση των ποιοτικών μεταβλητών. ( )

10) Οι αθροιστικές συχνότητες N_i μιας κατανομής εκφράζουν το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της συχνότητας v_i. ( )

11) Οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες F_i μιας κατανομής εκφράζουν το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες ή ίσες της τιμής x_i. ( )

12) Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποσοτικής μεταβλητής. ( )

13) Όταν θέλουμε να κάνουμε τη γραφική παράσταση των τιμών της μεταβλητής Χ: "αριθμός απουσιών μαθητών της Γ΄ Λυκείου το μήνα Δεκέμβριο" χρησιμοποιούμε το διάγραμμα συχνοτήτων. ( )

14) Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση μόνο ποιοτικών δεδομένων. ( )

15) Το κυκλικό διάγραμμα είναι ένας κυκλικός δίσκος χωρισμένος σε κυκλικούς τομείς τα εμβαδά των οποίων είναι αντιστρόφως ανάλογα προς τις αντίστοιχες συχνότητες v_i. ( )

16) Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για όλα τα είδη των μεταβλητών. ( )

17) Το σημειόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική απεικόνιση της διαχρονικής εξέλιξης μιας εξεταζόμενης μεταβλητής X. ( )

18) Σε ένα ραβδόγραμμα το πλάτος των ορθογωνίων αντιστοιχεί στις συχνότητες των τιμών της μεταβλητής. ( )

19) Χρησιμοποιώντας τις αθροιστικές συχνότητες N_i κατασκευάζουμε το ραβδόγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων. ( )

20) Το πολύγωνο συχνοτήτων κατασκευάζεται ενώνοντας τις κορυφές των γραμμών σε ένα διάγραμμα συχνοτήτων. ( )

21) Το εμβαδό που περικλείεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον άξονα xx' ισούται με 1. ( )

22) Το εμβαδό που περικλείεται από το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων και τον άξονα xx' ισούται με 100. ( )

23) Το διάγραμμα συχνοτήτων χρησιμοποιείται για ποσοτικές μεταβλητές. ( )

24) Στο κυκλικό διάγραμμα ισχύει: $\hat{\varphi}_i = \dfrac{v_i}{v} \cdot 360^0$ ( )

25) Για την κατασκευή του κυκλικού διαγράμματος χρειαζόμαστε τις αθροιστικές συχνότητες N_i. ( )

26) Μια μεταβλητή X παίρνει 30 διαφορετικές τιμές. Το καταλληλότερο διάγραμμα είναι το κυκλικό διάγραμμα. ( )

27) Το σημειόγραμμα χρησιμοποιείται όταν έχουμε λίγες παρατηρήσεις. ( )

28) Το χρονόγραμμα παρουσιάζει τη χρονική εξέλιξη ενός μεγέθους. ( )

29) Ομαδοποίηση των παρατηρήσεων κάνουμε όταν έχουμε πολύ μεγάλο δείγμα. ( )

30) Η ομαδοποίηση των παρατηρήσεων επιφέρει σφάλμα στα συμπεράσματά μας. ( )

31) Οι κλάσεις στην ομαδοποίηση είναι διαστήματα της μορφής [,). ( )

32) Στην ομαδοποίηση πρέπει η μικρότερη παρατήρηση να ανήκει στην πρώτη κλάση

και η μεγαλύτερη στην τελευταία κλάση. ( )

33) Η διαφορά της πρώτης παρατήρησης από την τελευταία ονομάζεται εύρος του δείγματος. ( )

34) Ο αριθμός των κλάσεων στην ομαδοποίηση επηρεάζει την ακρίβεια των συμπερασμάτων μας. ( )

35) Συχνότητα $ν_i$ μιας κλάσης ονομάζουμε το πλήθος των παρατηρήσεων της. ( )

36) Η διαφορά μεταξύ δύο κεντρικών τιμών δύο διαδοχικών κλάσεων πρέπει να ισούται με το πλάτος κάθε κλάσης. ( )

37) Στην ομαδοποίηση όλες οι κλάσεις πρέπει απαραίτητα να έχουν ίσα πλάτη. ( )

38) Η παρατήρηση με τιμή 175 τοποθετείται στην κλάση 170 – 175. ( )

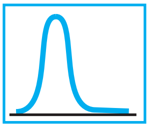
39) Οι παρατηρήσεις σε κάθε κλάση θεωρούμε ότι κατανέμονται ομοιόμορφα. ( )

40) Το ιστόγραμμα συχνοτήτων κατασκευάζεται μόνο για συνεχείς μεταβλητές. ( )

41) Η ομαδοποίηση γίνεται για όλα τα είδη των μεταβλητών. ( )

42) Πλάτος κλάσης ενός δείγματος ονομάζεται το άθροισμα του κατωτέρου και του ανωτέρου ορίου της κλάσης. ( )

43) Όταν ο αριθμός των κλάσεων για μια συνεχή μεταβλητή είναι αρκετά μικρός και το πλάτος των κλάσεων είναι αρκετά μεγάλο τότε η πολυγωνική γραμμή συχνοτήτων τείνει να πάρει τη μορφή μιας ομαλής καμπύλης, η οποία ονομάζεται καμπύλη συχνοτήτων. ( )



44) Η διπλανή κατανομή είναι ασύμμετρη με αρνητική ασυμμετρία. ( )

45) Το εύρος του δείγματος χρησιμοποιείται για να κατασκευάσουμε ισοπλατείς κλάσεις. ( )

46) Οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης ενός δείγματος μπορούν να αντιπροσωπευθούν από τις κεντρικές τιμές τους. ( )

47) Το κέντρο κάθε κλάσης ενός δείγματος ισούται με την ημιδιαφορά των άκρων της κλάσης. ( )

48) Η γραφική παράσταση ενός πίνακα συχνοτήτων μιας κατανομής με ομαδοποιημένα δεδομένα γίνεται με το ιστόγραμμα συχνοτήτων. ( )

49) Στο ιστόγραμμα συχνοτήτων κατασκευάζουμε διαδοχικά ορθογώνια καθένα από

τα οποία έχει εμβαδόν ίσο με τη σχετική συχνότητα της κάθε κλάσης. ( )

50) Στο ιστόγραμμα συχνοτήτων τα ορθογώνια είναι κολλημένα μεταξύ τους. ( )

51) Κάθε ορθογώνιο αντιπροσωπεύει στο ιστόγραμμα συχνοτήτων μια κλάση. ( )

52) Σε ένα ιστόγραμμα συχνοτήτων τα ύψη των ορθογωνίων αντιστοιχούν πάντα στη συχνότητα της αντίστοιχης κλάσης. ( )

53) Σε ένα ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων ενώνοντας τα μέσα των άνω βάσεων των ορθογωνίων παρ/μων, κατασκευάζουμε το πολύγωνο συχνοτήτων. ( )

54) Σε ένα ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων ενώνοντας τα μέσα των άνω βάσεων των ορθογωνίων παρ/μων, κατασκευάζουμε το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων. ( )

55) Μπορούμε στην ομαδοποίηση να φτιάξουμε κλάσεις άνισου πλάτους αν οι συχνότητες των κλάσεων έχουν μεγάλη διαφορά. ( )

Ερωτήσεις Πολλαπλής Επιλογής.

1. Για να παρουσιάσουμε ένα δείγμα μεγέθους 10 είναι καταλληλότερο:
   α) Κυκλικό διάγραμμα β) Ραβδόγραμμα γ) Ιστόγραμμα
   δ) Σημειόγραμμα ε) Κανένα από τα παραπάνω.

2. Όταν μελετούμε μια ποιοτική μεταβλητή μπορούμε να κατασκευάσουμε:
   α) Ραβδόγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων. β) Χρονόγραμμα.
   γ) Διάγραμμα συχνοτήτων. δ) Πολύγωνο συχνοτήτων.
   ε) Τίποτε από τα παραπάνω.

3. Το ζεύγος που αποτελεί την κατανομή συχνοτήτων είναι:
   α) (x_i, ν_i) β) (x_i, f_i) γ) (ν_i, f_i) δ) $(x_i f_i, \nu x_i)$ ε) $(\nu f_i, x_i)$

4. Σε ένα δείγμα μεγέθους ν με συχνότητα ν_i της τιμής x_i μιας μεταβλητής X η σχετική συχνότητα f_i ισούται με:

   α) $f_i = \dfrac{\nu}{\nu_i}$ β) $f_i = \dfrac{\nu_i}{\nu}$ γ) $f_i = \nu_i - \nu$ δ) $f_i = \nu_i \cdot \nu$ ε) $f_i = \dfrac{100}{\nu_i}$

5. Αν $x_1, x_2, \ldots, x_\kappa$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής Χ, που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους ν, τότε αν στην τιμή x_i αντιστοιχίσουμε τη συχνότητα ν_i ισχύει:

α) $\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_\kappa=100$ β) $\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_\kappa=\nu$ γ) $\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_\kappa=\kappa$

δ) $\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_\kappa=\nu\kappa$ ε) $\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_\kappa=100\nu$

6. Αν $x_1, x_2,\ldots, x_\kappa$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής Χ, που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους ν, $\kappa \leq \nu$, τότε για τις σχετικές συχνότητες $f_1, f_2, \ldots, f_\kappa$ ισχύει:

α) $f_1+f_2+\ldots+f_\kappa=100$ β) $f_1+f_2+\ldots+f_\kappa=\kappa^2$ γ) $f_1+f_2+\ldots+f_\kappa=1$

δ) $f_1+f_2+\ldots+f_\kappa=10$ ε) $f_1+f_2+\ldots+f_\kappa=\kappa$

7. Το άθροισμα όλων των αθροιστικών συχνοτήτων F_i ισούται με:

α) 1 β) Το μέγεθος του δείγματος ν. γ) 100 δ) 0

ε) Τίποτε από τα προηγούμενα.

8. Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται:

α) Για ποιοτικές μεταβλητές μόνο. β) Για μικρά δείγματα.

γ) Για μικρό πλήθος τιμών x_i. δ) Για ποσοτικές μεταβλητές μόνο.

ε) Τίποτε από τα παραπάνω.

9. Σε ένα κομμάτι ενός κυκλικού διαγράμματος που αντιστοιχεί στην τιμή x_i η κεντρική γωνία είναι 72°. Τότε η τιμή x_i:

α) Έχει συχνότητα $\nu_i = 72$. β) Έχει αθροιστική συχνότητα $N_i = 72$.

γ) Έχει σχετική συχνότητα $f_i = 0,2$. δ) Έχει σχετική συχνότητα $f_i = 0,72$.

ε) Κανένα από τα παραπάνω.

10. Σε ένα ραβδόγραμμα συχνοτήτων :

α) το ύψος κάθε ράβδου ισούται με τη συχνότητα της αντίστοιχης τιμής x_i.

β) το εμβαδόν κάθε ράβδου ισούται με τη συχνότητα της αντίστοιχης τιμής x_i.

γ) το πλάτος κάθε ράβδου ισούται με τη συχνότητα της αντίστοιχης τιμής x_i.

δ) το ύψος κάθε ράβδου είναι αυθαίρετο.

ε) τίποτε από τα παραπάνω.

11. Στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων αν συμβολίσουμε με α_i το αντίστοιχο τόξο ενός κυκλικού τμήματος τότε το α_i ισούται με:

α) $360°$ β) $360°\, f_i$ γ) $90°\, f_i$ δ) $180°\nu_i$ ε) $180°\, f_i$

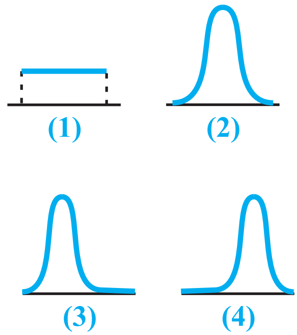
12. Κατά την ομαδοποίηση παρατηρήσεων, αν R είναι το εύρος του δείγματος και q, ο αριθμός των κλάσεων, το πλάτος των κλάσεων c θα είναι:

α) $c \approx \frac{R}{\kappa}$ β) $c \approx \frac{\kappa}{R}$ γ) $c \approx \kappa \cdot R$ δ) $c \approx \kappa - R$ ε) $c \approx R - q$

13. **Από τις διπλανές κατανομές συχνοτήτων αυτή που προσεγγίζει καλύτερα την κανονική είναι η:**

α) (1)   β) (2)   γ) (3)   δ) (4)

ε) καμία από τις παραπάνω



14. **Από τις διπλανές κατανομές συχνοτήτων ομοιόμορφη είναι η:**

α) (1)   β) (2)   γ) (3)   δ) (4)

ε) καμία από τις παραπάνω

15. **Αν α, β είναι τα άκρα μίας κλάσης σε μια ομαδοποίηση παρατηρήσεων, η κλάση είναι της μορφής:**

α) (α, β)   β) [α, β)   γ) (α, β]   δ) [α, β]

ε) όλα τα παραπάνω

16. **Ομαδοποίηση κάνουμε συνήθως όταν:**

α) Έχουμε μεγάλο δείγμα.

β) Έχουμε μεγάλο πλήθος διαφορετικών τιμών x_i.

γ) Η μεταβλητή μας είναι ποιοτική.

δ) Η μεταβλητή μας είναι ποσοτική.

ε) Τίποτε από τα προηγούμενα.

Ασκήσεις.

1. Σε μια δειγματοληπτική έρευνα του βάρους των μαθητών της τρίτης τάξης ενός Λυκείου 20 μαθητές είχαν τα επόμενα βάρη σε κιλά:

63	66	59	75	78	70	75	81	81	70	68	86	59	63	81	70	75	54	81	70

Να βρείτε: α) Το σύνολο των τιμών της μεταβλητής X (X το βάρος των μαθητών).
β) Τη συχνότητα των τιμών της μεταβλητής X.

2. Οι παρακάτω αριθμοί είναι οι ενδείξεις ενός ζαριού σε 30 ρίψεις.

2	2	6	1	2	5	1	3	1	5
6	5	5	5	1	3	5	6	5	4
6	2	6	2	4	6	1	1	4	5

Να κατασκευάσετε: α) τους πίνακες συχνοτήτων και αθροιστικών συχνοτήτων.
β) το διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων.

3. Οι παρακάτω αριθμοί είναι οι τηλεφωνικές κλήσεις που πραγματοποίησαν 50 συνδρομητές την ίδια μέρα.

3	4	9	5	7	11	8	11	10	6
7	8	12	9	11	12	12	12	7	10
4	3	5	3	6	8	9	10	5	8
11	11	12	6	3	7	10	12	12	12
9	4	7	10	11	12	5	4	6	6

Να κατασκευάσετε:
α) τους πίνακες συχνοτήτων και αθροιστικών συχνοτήτων.
β) το διάγραμμα συχνοτήτων.
γ) να βρεθεί το ποσοστό των συνδρομητών που πραγματοποίησαν
ι) τουλάχιστον 7 κλήσεις. ιι) το πολύ 8 κλήσεις. ιιι) από 5 εως και 10 κλήσεις

4. Οι χρόνοι αναμονής (σε min) 30 πελατών μέχρι να εξυπηρετηθούν από τον ταμία μιας τράπεζας είναι:

8	12	11	12	14	12	8	7	10	15
7	13	12	13	14	12	7	9	9	15
15	13	15	12	10	11	11	10	7	9

ι) Να κατασκευάσετε πίνακα συχνοτήτων και αθροιστικών συχνοτήτων των αποστάσεων.

ιι) Να κατασκευαστεί το διάγραμμα συχνοτήτων και το πολύγωνο συχνοτήτων.

5. Οι αποστάσεις (σε km) των 24 κοινοτήτων ενός νομού από το πλησιέστερο νοσοκομείο είναι:

5	10	8	8	13	10	4	2	4	16	5	15
6	4	7	5	4	6	7	7	5	8	10	3

ι) Να κατασκευάσετε πίνακα συχνοτήτων και αθροιστικών συχνοτήτων των αποστάσεων.

ιι) Πόσες κοινότητες απέχουν από το νοσοκομείο περισσότερο από 8 km;

ιιι) Πόσες κοινότητες απέχουν από το νοσοκομείο από 7 εως 13 km;

6. Η μεγαλύτερες ημερήσιες θερμοκρασίες σε μια πόλη επί 30 συνεχείς ημέρες (σε βαθμούς Κελσίου) φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

25	26	26	26	24	21	21	22	24	26
25	27	22	22	24	23	23	26	25	26
22	23	27	24	23	21	21	23	23	22

ι) Να κατασκευάσετε πίνακα συχνοτήτων και αθροιστικών συχνοτήτων.

ιι) Πόσες ημέρες η θερμοκρασία ήταν μικρότερη από 23° C;

ιιι) Πόσες ημέρες η θερμοκρασία ήταν μεγαλύτερη από 24° C;

ιν) Πόσες ημέρες η θερμοκρασία ήταν τουλάχιστον 24° C;

7. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

x_i	ν_i	f_i	N_i	F_i	F_i%	F_i%
1	8	0,4				
2			10			
3	5		15			
4				0,9		
5						
Σύνολο:						

8. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα και να κατασκευάσετε το διάγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων:

x_i	$ν_i$	f_i	N_i	F_i	F_i %	F_i %
1	8					
2			20			
3		0,2				
4						90
5			100			
Σύνολο:						

9. Χρησιμοποιώντας τον διπλανό πίνακα συχνοτήτων που δίνει την κατανομή συχνοτήτων 50 οικογενειών ως προς τον αριθμό των παιδιών τους, να βρεθεί ο αριθμός και το ποσοστό των οικογενειών που έχουν:

α) τουλάχιστον 1 παιδί β) πάνω από 3 παιδιά

γ) από 3 έως και 5 παιδιά

δ) το πολύ 6 παιδιά ε) ακριβώς 6 παιδιά.

Αριθμός παιδιών (x_i)	Αριθμός οικογενειών ($ν_i$)
1	10
2	15
3	13
4	5
5	4
6	3
Σύνολο:	50

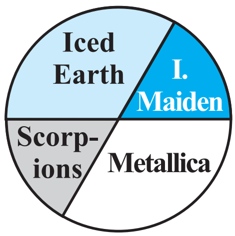
10. Μερικά από τα αποτελέσματα των εκλογών σ' ένα εκλογικό τμήμα δίνονται στον διπλανό πίνακα:

Πόσους ψήφους πήρε καθένα από τα κόμματα Α, Β, Γ και Δ;

Κόμματα	Συχν. $ν_i$ (ψήφοι)	Σχετική συχν. f_i %
Α	3.000	
Β		50
Γ		
Δ	2.010	10
Σύνολο:		100

11. α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα για τα δημοφιλέστερα μουσικά συγκροτήματα δεδομένου του κυκλικού διαγράμματος:

Μουσ. Συγκροτ.	Συχνότ. $ν_i$	Σχετ. Συχνότ. f_i %
Iron Maiden	45	
Iced Earth		35
Scorpions		
Metallica		
	300	



β) Να γίνει το ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων.

12. Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι διάρκειες 36 τηλεφωνικών κλήσεων (σε min) που πραγματοποιήθηκαν από ισάριθμους συνδρομητές:

11	13	20	18	11	12	11	14	15	18	19	12
11	15	13	19	19	11	20	19	13	15	16	20
19	19	14	15	18	12	11	13	12	12	18	18

ι) Να κατασκευάσετε τον πίνακα συχνοτήτων και αθροιστικών συχνοτήτων.
ιι) Να κάνετε το διάγραμμα: α) Συχνοτήτων. β) Αθροιστικών συχνοτήτων
ιιι) Να κάνετε το πολύγωνο των συχνοτήτων.
ιν) Να κάνετε το κυκλικό διάγραμμα.

13. Για τα επαγγέλματα του παρακάτω πίνακα να κατασκευάσετε:
ι) Τον πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων %
ιι) Το ραβδόγραμμα συχνοτήτων ιιι) Το κυκλικό διάγραμμα

Επάγγελμα	Μηνιαίος Μισθός (€)	Αριθμός παιδιών	Επάγγελμα	Μηνιαίος Μισθός (€)	Αριθμός παιδιών
Εργάτης	700	0	Εκπαιδευτικός	920	1
Οδηγός	730	1	Δημ. Υπάλληλος	920	3
Εργάτης	710	1	Οδηγός	800	2
Δημ. Υπάλληλος	900	2	Ιδιωτ. Υπάλληλος	800	2
Δημ. Υπάλληλος	940	0	Εργάτης	720	1
Εκπαιδευτικός	920	0	Ιατρός	1400	3
Ιατρός	1200	4	Εργάτης	700	0
Δημ. Υπάλληλος	950	1	Ιδιωτ. Υπάλληλος	800	2
Εκπαιδευτικός	920	1	Ιδιωτ. Υπάλληλος	800	2
Εκπαιδευτικός	940	2	Οδηγός	800	1
Ιδιωτ. Υπάλληλος	920	0	Ιδιωτ. Υπάλληλος	920	1
Εργάτης	740	0	Ιδιωτ. Υπάλληλος	920	1
Δημ. Υπάλληλος	940	0			

14. Για τους μηνιαίους μισθούς του πίνακα της άσκησης 13, να κατασκευάσετε:
ι) Τον πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων %
ιι) Τον πίνακα αθροιστικών συχνοτήτων και αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων
ιιι) Το διάγραμμα συχνοτήτων
ιν) Το πολύγωνο συχνοτήτων

15. Για τον αριθμό παιδιών του πίνακα της άσκησης 13 να κατασκευάσετε:
ι) Το πολύγωνο συχνοτήτων ιι) Το κυκλικό διάγραμμα

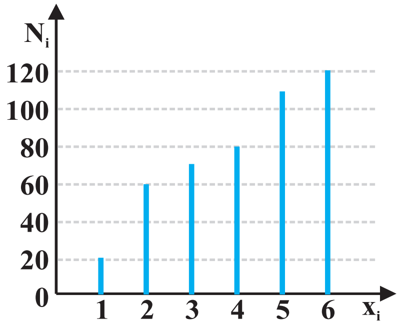
16. Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει τις προτιμήσεις 30 τηλεθεατών σε τηλεοπτικούς σταθμούς και εκπομπές.Να κατασκευάσετε:
ι) Ενα πίνακα διπλής εισόδου για τους τηλεοπτικούς σταθμούς και τις εκπομπές
ι) Το κυκλικό διάγραμμα με μεταβλητή τον τηλεοπτικό σταθμό.
ιι) Το ραβδόγραμμα συχνοτήτων με μεταβλητή την εκπομπή.

Τ. Σταθμός	Εκπομπή	Τ. Σταθμός	Εκπομπή
ANT1	Αθλητικά	ANT1	Αθλητικά
MEGA	Αθλητικά	MEGA	Τηλεπαιχνίδια
ANT1	Ειδήσεις	ANT1	Πρωινές εκπομπές
ANT1	Αθλητικά	STAR	Ταινίες
MEGA	Ταινίες	NET	Ταινίες
STAR	Αθλητικά	MEGA	Σειρές
ANT1	Αθλητικά	MEGA	Πρωινές εκπομπές
NET	Ειδήσεις	ANT1	Σειρές
ANT1	Πρωινές εκπομπές	STAR	Αθλητικά
NET	Αθλητικά	ANT1	Σειρές
ANT1	Σειρές	NET	Ειδήσεις
NET	Αθλητικά	STAR	Ταινίες
ANT1	Σειρές	MEGA	Τηλεπαιχνίδια
MEGA	Ταινίες	NET	Ειδήσεις
NET	Ειδήσεις	STAR	Ταινίες

17. Για τον πίνακα της άσκησης 16 να κατασκευάσετε έναν πίνακα διπλής εισόδου με γραμμές τις εκπομπές και στήλες τους τηλεοπτικούς σταθμούς. Κατόπιν να κατασκευάσετε:
ι) Τα κυκλικά διαγράμματα για κάθε τηλεοπτικό σταθμό με μεταβλητή την εκπομπή.
ιι) Τα ραβδογράμματα συχνοτήτων για κάθε εκπομπή με μεταβλητή τον τηλεοπτικό σταθμό.

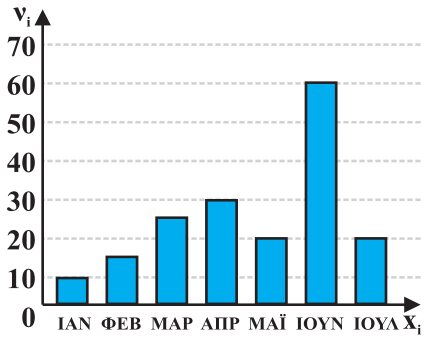
18. Οι αθροιστικές συχνότητες για μέρες ζωής από τη χορήγηση ενός νέου φαρμάκου σε ποντίκια είναι: $N_1 = 5$, $N_2 = 12$, $N_3 = 23$, $N_4 = 42$, $N_5 = 47$, $N_6 = 48$, $N_7 = 50$.
Να κατασκευάσετε:
ι) Τους πίνακες συχνοτήτων, σχετικών συχνοτήτων και αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.
ιι) Το πολύγωνο συχνοτήτων
ιιι) Το κυκλικό διάγραμμα.

19. Εστω το διπλανο διάγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων. Να κατασκευάσετε:



α) το διάγραμμα συχνοτήτων.
β) το κυκλικό διάγραμμα

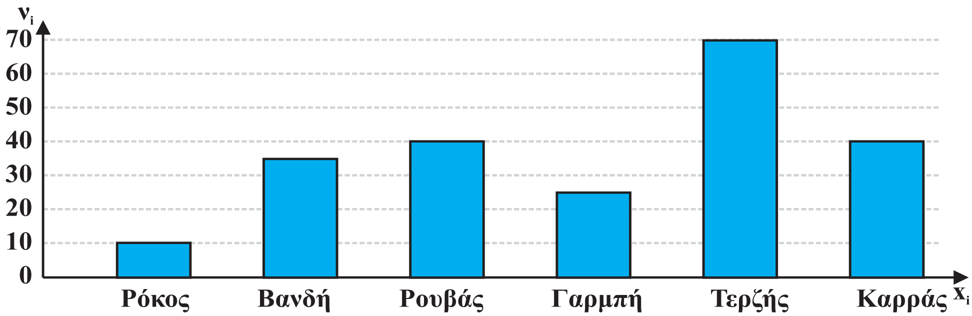
20. Οι πωλήσεις σε χιλιάδες τεμάχια ενός προϊόντος φαίνονται στο παρακάτω ραβδόγραμμα. Να κατασκευάσετε το κυκλικό διάγραμμα.



21. Με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα αφού τον συμπληρώσετε να κατασκευάσετε
α) το κυκλικό διάγραμμα.
β) το ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων.

Τιμές x_i	Συχνότητα ν_i	Γωνία φ_i
Α	15	
Β		36°
Γ		108°
Δ		
	150	

22. Δίνεται το ραβδόγραμμα συχνοτήτων για τους δημοφιλέστερους τραγουδιστές της περασμένης χρονιάς

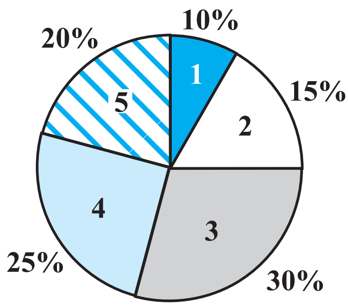


Να κάνετε τον πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων. Κατόπιν κατασκευάστε το κυκλικό διάγραμμα.

23. **Σε ένα κυκλικό διάγραμμα ο κυκλικός τομέας της τιμής Α έχει κεντρική γωνία ίση με 120°. Αν η μεταβλητή που μελετούμε παίρνει τιμές Α.Β,Γ,Δ και η τιμή Α έχει διπλάσια σχετική συχνότητα από την Β και τριπλάσια από την Γ, να κατασκευάσετε το αντίστοιχο ραβδόγραμμα.**

24. **Ενα κράμα μετάλλων περιέχει 132,5gr σίδηρο, 74gr χαλκό, 12,5gr κασίτερο και 4gr άργυρο. Να γίνει το κυκλικό διάγραμμα των ποσοτήτων του κράματος.**

25. **Να κατασκευάσετε το πολύγωνο συχνοτήτων για τις τιμές 1,2,3,4,5 σε ένα δείγμα 200 παρατηρήσεων, δεδομένου του διπλανού κυκλικού διαγράμματος.**



26. **Σε ένα κυκλικό διάγραμμα ο κυκλικός τομέας της τιμής Α είναι 72°. Η τιμή Β έχει διπλάσια συχνότητα από την Α και οι τιμές Γ και Δ έχουν την ίδια συχνότητα. Να κατασκευάσετε το κυκλικό διάγραμμα και να το μετατρέψετε σε ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων.**

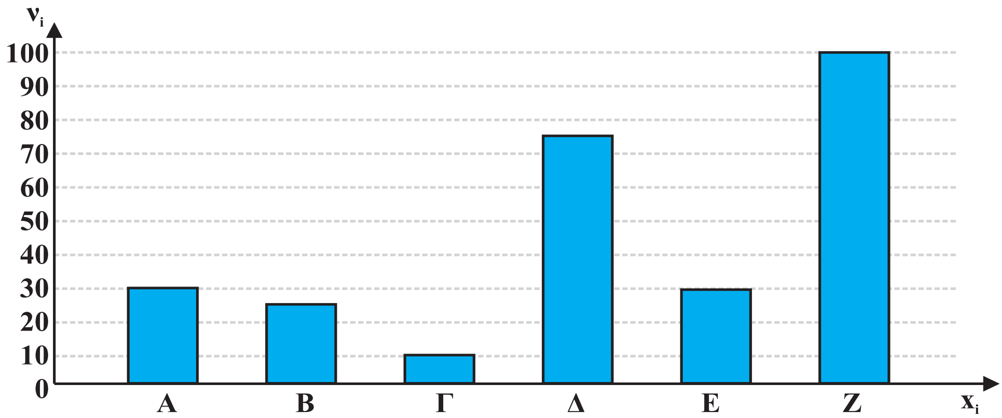
27. **Σε ένα πείραμα η μεταβλητή παίρνει τις τιμές Α,Β,Γ,Δ. Αν οι σχετικές συχνότητες των τιμών είναι αντίστοιχα x, 2x, 4x, 8x να κατασκευάσετε:**
ι) Το κυκλικό διάγραμμα
ιι) Το ραβδόγραμμα συχνοτήτων αν το μέγεθος του δείγματος είναι 300.

28. **Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει την κατανομή (%) του πληθυσμού της Ελλάδας κατά τις απογραφές των ετών 1951, 1961, 1971.**

Έτος απογραφής	Αστικός %	Ημιαστικός %	Αγροτικός %
1951	37,7	14,8	47,5
1961	43,3	12,9	43,8
1971	53,2	11,6	35,2

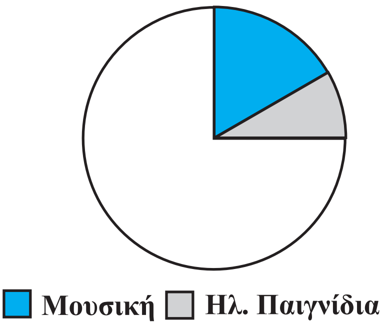
ι) Να κατασκευάσετε στο ίδιο διάγραμμα τα ραβδογράμματα των σχετικών συχνοτήτων.
ιι) Να κατασκευάσετε τα αντίστοιχα κυκλικά διαγράμματα για κάθε χρονιά.

29. Να μετατρέψετε το παρακάτω ραβδόγραμμα συχνοτήτων σε κυκλικό διάγραμμα.

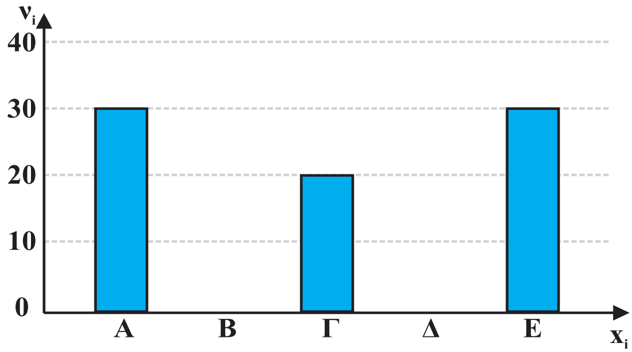


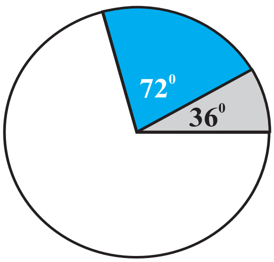
30. Να συμπληρωθεί το κυκλικό διάγραμμα και ο πίνακας, ο οποίος παρουσιάζει τις ασχολίες μαθητών της Α΄ Λυκείου κατά τον ελεύθερο χρόνο τους:

Ασχολία x_i	ν_i	f_i %
Ηλ.Παιχνίδια	10	
Μουσική	20	
Αθλητισμός		25
Κινηματογράφος		
Λογοτεχνία	10	



31. Να συμπληρώσετε το ραβδόγραμμα συχνοτήτων και το κυκλικό διάγραμμα που αφορούν το ίδιο δείγμα.





32. Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει τις μουσικές προτιμήσεις 40 ατόμων ηλικίας εώς 25 ετών.

Είδος μουσικής	Καλλιτέχνης μ.συγκρότημα	Είδος μουσικής	Καλλιτέχνης μ.συγκρότημα
Ξένη Rock	Bryan Adams	Hip Hop	Razastar
Κλασική	Vivaldi	Ελληνική Rock	Τρύπες
Heavy Metal	Iron Maiden	Λαϊκά	Π. Τερζής
Ξένη Rock	Rolling Stones	Ελληνική Rock	Πυξ Λαξ
Heavy Metal	Iron Maiden	Ελληνική Rock	Πυξ Λαξ
Ελληνική Rock	Πυξ Λαξ	Heavy Metal	Iron Maiden
Ξένη Rock	Rolling Stones	Λαϊκά	Βασίλης Καρράς
Heavy Metal	Iron Maiden	Hip Hop	Razastar
Κλασική	Ciaikovski	Heavy Metal	Iron Maiden
Ξένη Rock	Rolling Stones	Ξένη Rock	U2
Hip Hop	Razastar	Ελληνική Rock	Τρύπες
Λαϊκά	Π. Τερζής	Λαϊκά	Βασίλης Καρράς
Ελληνική Rock	Πυξ Λαξ	Λαϊκά	Π. Τερζής
Κλασική	Ciaikovski	Ελληνική Rock	Πυξ Λαξ
Λαϊκά	Βασίλης Καρράς	Ξένη Rock	U2
Hip Ho	Razastar	Ελληνική Rock	Π. Σιδηρόπουλος
Λαϊκά	Βασίλης Καρράς	Heavy Metal	Iron Maiden
Ξένη Rock	Rolling Stones	Κλασική	Ciaikovski
Ελληνική Rock	Π.Σιδηρόπουλος	Ελληνική Rock	Πυξ Λαξ
Λαϊκά	Π. Τερζής	Ελληνική Rock	Π. Σιδηρόπουλος

Να κατασκευάσετε:

ι) Το κυκλικό διάγραμμα για τα είδη της μουσικής

ιι) Το ραβδόγραμμα συχνοτήτων για τη στήλη Καλλιτέχνης ή μουσικό συγκρότημα. Ποιός είναι πιο δημοφιλής;

ιιι) Ξεχωριστά για κάθε είδος μουσικής να κάνετε ραβδογράμματα συχνοτήτων για τους καλλιτέχνες ή τα μουσικά συγκροτήματα. Ποιοί είναι οι δημοφιλέστεροι στο κάθε είδος;

33. Σε ένα πείραμα ρωτήσαμε 30 άνδρες (Α) και γυναίκες (Γ) για την οικογενειακή τους κατάσταση. Οι πιθανές απαντήσεις ήταν άγαμος (Α), έγγαμος (Ε), διαζευγμένος (Δ) και χηρος (Χ). Τα αποτελέσματα του πειράματος παρουσιάζονται παρακάτω σε ζεύγη Φύλο - Οικ.κατάσταση.

(Α,Α)	(Α,Δ)	(Γ,Α)	(Γ,Ε)	(Α,Δ)	(Α,Δ)	(Α,Χ)	(Α,Α)	(Α,Χ)	(Α,Δ)
(Α,Ε)	(Γ,Χ)	(Γ,Δ)	(Α,Ε)	(Γ,Α)	(Α,Α)	(Γ,Χ)	(Γ,Ε)	(Α,Ε)	(Γ,Δ)
(Γ,Δ)	(Α,Α)	(Α,Δ)	(Γ,Ε)	(Γ,Α)	(Α,Ε)	(Α,Ε)	(Α,Α)	(Γ,Ε)	(Α,Α)

ι) Να κατασκευάσετε ένα πίνακα διπλής εισόδου με γραμμές τα φύλα και στήλες τις οικογενειακές καταστάσεις.

ιι) Να κατασκευάσετε τα ραβδόγραμματα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων με μεταβλητή το φύλο.
ιιι) Να κατασκευάσετε τα ραβδόγραμματα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων με μεταβλητή την οικογενειακή κατάσταση.
ιν) Να κατασκευάσετε το κυκλικό διάγραμμα για κάθε μεταβλητή.

34. Σε ένα κυκλικό διάγραμμα παριστάνονται οι εξαγωγές της χώρας μας αξίας 97.000.000.000 δρχ. κατά το έτος 1980 ανάλογα με το μέσο μεταφοράς. Η γωνία του κυκλικού τομέα για μέσο μεταφοράς “δια θαλάσσης” είναι 180°. Το 13,917% της αξίας των εξαγωγών έγινε “σιδηροδρομικώς”. Οι μεταφορές που έγιναν “οδικώς” ήταν τετραπλάσιες σε αξία από αυτές που έγιναν “αεροπορικώς”. Να μετατρέψετε το κυκλικό διάγραμμα σε ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων.

35.

Ήπειρος	Έκταση	f_i %
Αμερική	20,8	
Ασία	44	
Αφρική	30,5	
Ευρώπη	10,5	
Ωκεανία	9	
Σύνολο:	114,8	

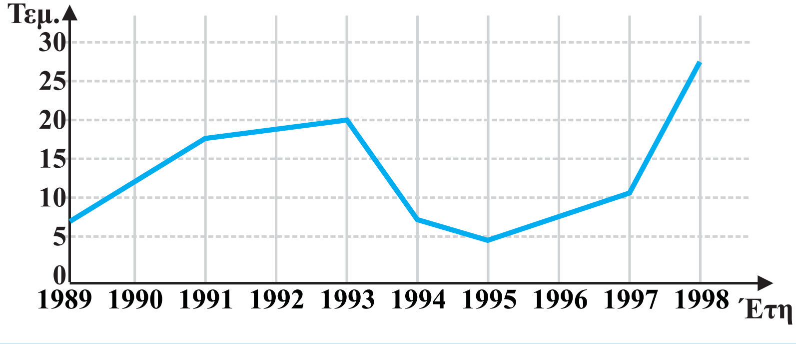
Να συμπληρωθεί ο διπλανός πίνακας και να σχεδιαστεί το κυκλικό διάγραμμα.

36. Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει την ετήσια παραγωγή μιας βιομηχανίας ηλεκτρικών ειδων.

Είδος	Ψυγεία	Κουζίνες	Πλυντήρια	Τηλεοράσεις
Τεμάχια	51.000	11.000	31.000	7.000

Να κάνετε το αντίστοιχο κυκλικό διάγραμμα.

37. Οι πωλήσεις μιας εταιρίας ηλεκτρικών ειδών σε χιλιάδες τεμάχια για τα τελευταία 10 έτη φαίνονται στο παρακάτω χρονόγραμμα:



α) Να βρεθεί ο αριθμός πωλήσεων σε κάθε έτος.
β) Ποια ήταν η χειρότερη χρονιά και πόσο τοις εκατό είχαμε μεταβολή στις πωλήσεις σε σχέση με την προηγούμενη;
γ) Ποια ήταν η καλύτερη χρονιά και πόσο τοις εκατό είχαμε μεταβολή στις πωλήσεις σε σχέση με την προηγούμενη;
δ) Να βρεθούν τα διαστήματα αύξησης και τα διαστήματα μείωσης των πωλήσεων.

38. Η μέγιστη μηνιαία θερμοκρασία του περιβάλλοντος σε μια τοποθεσία ετησίως δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

Ιαν.	Φεβ.	Μαρ.	Απρ.	Μαι.	Ιουν.	Ιουλ	Αυγ.	Σεπ.	Οκτ.	Νοε.	Δεκ.
14,4	15,6	17,4	21,7	27,1	32,5	36,5	29,6	26,3	23,1	15,5	14,8

Η ελάχιστη μηνιαία θερμοκρασία του περιβάλλοντος σε μια τοποθεσία ετησίως δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

Ιαν.	Φεβ.	Μαρ.	Απρ.	Μαι.	Ιουν.	Ιουλ	Αυγ.	Σεπ.	Οκτ.	Νοε.	Δεκ.
09,1	10,9	12,4	18,1	25,1	28,7	32,9	25,5	20,2	17,5	11,8	10,3

Η μηνιαία θερμοκρασία του περιβάλλοντος σε μια τοποθεσία το περασμένο έτος δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

Ιαν.	Φεβ.	Μαρ.	Απρ.	Μαι.	Ιουν.	Ιουλ	Αυγ.	Σεπ.	Οκτ.	Νοε.	Δεκ.
08,7	09,9	14,4	19,5	26,0	30,1	37,5	29,6	26,3	21,0	14,1	11,0

α) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων και τα τρία χρονογράμματα.
β) Σε ποιούς μήνες είχαμε θερμοκρασία μεγαλύτερη της αναμενόμενης;
γ) Σε ποιούς μήνες είχαμε θερμοκρασία μικρότερη της αναμενόμενης;

39. Το βάρος ενός ζώου κατά τους πρώτους 10 μήνες της ζωής του φαίνεται στον πίνακα:

Μήνες	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Βάρος (Kgr)	2	3	4,5	5,3	6	7	9	10,5	13	15	19

Να σχεδιάσετε το χρονόγραμμα της εξέλιξης του βάρους του.

40. Δίδεται ο παρακάτω πίνακας τροχαίων ατυχημάτων για μια Ευρωπαϊκή χώρα.

Έτος	Ατυχήματα	Νεκροί	Τραυματίες
1990	880	801	1220
1991	832	853	1000
1992	920	896	1230
1993	918	899	1108
1994	1150	912	1095
1995	956	864	1285
1996	1164	991	1295
1997	1023	987	1056
1998	1200	1010	1226

Να κατασκευάσετε:

ι) ένα χρονόγραμμα για τους νεκρούς και για τους τραυματίες.

ιι) ένα χρονόγραμμα για τα ατυχήματα.

41. Ενας Δήμος της Αττικής δαπάνησε για έργα τα παρακάτω ποσά (σε χιλιάδες ευρώ):

Έτη:	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
Ποσά:	150	120	200	180	200	200	150	100	120

Να κατασκευασθεί το χρονόγραμμα δαπανών του Δήμου.

42. Η θερμοκρασία ενός ασθενούς από τη στιγμή χορήγησης αντιβίωσης δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

Ώρες:	1	2	3	4	5	6	7	8
Θερμοκρασία:	39,1	38,9	38,1	38,1	37,9	38,2	37,9	37,2

α) Να κατασκευάσετε το χρονόγραμμα εξέλιξης της θερμοκρασίας.

β) Να βρείτε τη μέση θερμοκρασία τις πρώτες 8 ώρες.

43. Στα διόδια Σχηματαρίου η τροχαία σημείωνε στο χρονικό διάστημα μιας ώρας το συνολικό αριθμό αυτοκινήτων που είχαν περάσει. Έτσι, από το μεσημέρι ως τις 7 μ.μ., προέκυψε ο παρακάτω πίνακας:

Χρόνος ώρες:	13:00	14:00	15:00	16:00	17:00	18:00	19:00
Αριθμ.αυτοκ.:	400	200	300	350	350	400	600

Να γράψετε το αντίστοιχο χρονόγραμμα.

44. **Οι πωλήσεις ενός εποχικού προϊόντος κατά τη διάρκεια της χρονιάς είναι οι εξής: τους πρώτους επτά μήνες ακολουθούν αριθμητική πρόοδο με διαφορά ω = 15.000 τεμάχια και τους υπόλοιπους ακολουθούν γεωμετρική πρόοδο με λόγο λ = 0,9. Να γίνει το χρονόγραμμα των πωλήσεων για ένα έτος δεδομένου ότι το Μάρτιο οι πωλήσεις φτάνουν τα 175.000 τεμάχια**

45. **Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει τα αποτελέσματα 15 επιτυχόντων στο μάθημα της Στατιστικής.**

8	7	5	5	7	5	6	9	5	6	7	5	8	5	6

Να κατασκευάσετε το αντίστοιχο σημειόγραμμα.

46. **Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει τις ημέρες ανάρρωσης 15 ασθενών μετά τη χορήγηση αντιβίωσης.**

2	4	1	2	3	2	6	4	2	5	4	3	3	2	3

Να κατασκευασθεί : ι) Ο πίνακας συχνοτήτων ιι) Το αντίστοιχο σημειόγραμμα
ιιι) Το πολύγωνο συχνοτήτων

47. **Τα χρόνια υπηρεσίας 50 δημοσίων υπαλλήλων φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:**

1	6	2	11	3	20	2	4	12	5
8	8	6	15	7	6	2	9	17	3
23	3	1	10	9	4	7	10	3	11
9	7	14	13	13	12	6	4	19	6
14	1	15	23	16	17	18	4	19	20

α) Να ομαδοποιήσετε τις ηλικίες αυτές σε 7 κλάσεις ίσου πλάτους.
β) Να κανετε το ιστόγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων των ετών υπηρεσίας.
γ) Να βρείτε πόσοι υπάλληλοι εργάζονται στην υπηρεσία:
i) Περισσότερο από 14 χρόνια ii) Λιγότερο από 18 χρόνια.

48. **Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει τη διάρκεια ζωής σε ώρες λειτουργίας 200 όμοιων ανταλλακτικών από την παραγωγή ενός εργοστασίου.**
α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

Διάρκεια ζωής	ν_i	f_i	f_i %	N_i	F_i	F_i %
300 - 400	15					
400 - 500	25					
500 - 600	50					
600 - 700	35					
700 - 800	10					
800 - 900	40					
900 - 1000	25					
	200					

β) Να κάνετε: ι) Το ιστόγραμμα συχνοτήτων
ιι) Το ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων

γ) Να βρείτε το ποσοστό των ανταλλακτικών με διάρκεια ζωής
ι) Μέχρι 500 ώρες ιι) Από 350 εως 650 ώρες ιιι) Από 320 εως 620 ώρες.

49. Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει τη συγκέντρωση (σε mgr/cm³) ενός ρύπου στον αέρα 50 πόλεων των ΗΠΑ. Να κάνετε τα παρακάτω:

68	63	42	27	30	36	28	32	79	27	58	22	23
24	25	26	25	24	64	36	57	48	32	45	47	61
58	39	37	49	50	46	62	60	37	29	60	50	41
37	28	29	33	67	34	58	64	49	28	40		

ι) Να βρείτε το εύρος του δείγματος

ιι) Να ομαδοποιήσετε τις παρατηρήσεις σε 7 κλάσεις και να κατασκευάσετε το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων

ιιι) Να βρείτε το ποσοστό των πόλεων με συγκέντρωση μικρότερη ή ίση των 50mgr/cm³

ιv) Να βρείτε τη συγκέντρωση των ρύπων κάτω από την οποία βρίσκονται το 50% των πόλεων

50. Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει τις βαθμολογίες 50 μαθητών σε Test IQ.

108	103	116	122	107	110	114	103	100	103
102	107	114	105	119	100	108	114	97	99
100	98	94	117	100	111	104	105	99	107
96	102	115	111	100	97	109	109	112	100
120	109	116	118	107	98	108	99	118	109

Να ομαδοποιήσετε τις παρατηρήσεις και κατόπιν να κατασκευάσετε:
ι) Τους πίνακες συχνοτήτων ιι) Το ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων
ιιι) Το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων

51. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων.

Κλάσεις	Κεντρικές τιμές x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική Συχνότητα f_i	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Αθρ. Σχετ. Συχνότητα F_i
153 - 159	156	20			
159 -				42	
165 - 171					0,51
- 177	174	12			
177 - 183			0,09		
183 -			0,1		0,82
- 195	192			100	
	Σύνολο:				

Κατόπιν να κατασκευάσετε:
ι) Το κυκλικό διάγραμμα ιι) Το πολύγωνο συχνοτήτων
ιιι) Το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων

52. Στα σχολεία ενός δήμου υπηρετούν συνολικά 100 εκπαιδευτικοί. Ο συνολικός χρόνος υπηρεσίας των εκπαιδευτικών δίνεται από τον διπλανό πίνακα:

Χρ. υπ/σίας [-)	Σχ. Συχν. f_i%
0 - 5	10
5 - 10	15
10 - 15	12
15 - 20	15
20 - 25	18
25 - 30	18
30 - 35	12

α) Πόσοι εκπαιδευτικοί έχουν τουλάχιστον 15 χρόνια υπηρεσίας;
β) Με την προϋπόθεση ότι κάθε εκπαιδευτικός θα συνταξιοδοτηθεί όταν συμπληρώσει 35 χρόνια:
ι) πόσοι εκπαιδευτικοί θα συνταξιοδοτηθούν στα επόμενα 12,5 χρόνια. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
ιι) πόσοι συνολικά εκπαιδευτικοί πρέπει συνολικά να προσληφθούν στα επόμενα 5 χρόνια ώστε ο αριθμός των εκπαιδευτικών που υπηρετούν στα σχολεία του Δήμου να παραμένει ο ίδιος; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

53. Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει ηλικίες 75 νεοσυλλέκτων σε Κέντρο Εκπαίδευσης.

19	18	18	19	20	24	19	26	28	24	25	19	25
20	21	27	23	27	28	24	26	20	18	23	20	22
20	18	20	27	20	19	24	28	26	27	24	23	21
27	28	26	22	23	24	25	18	21	20	23	21	22
19	19	18	19	25	27	23	26	28	20	26	22	24
18	20	24	19	23	23	20	20	21	22			

ι) Να κάνετε τους πίνακες συχνοτήτων

ιι) Να βρείτε το ποσοστό των ανδρών ηλικίας από 22 εως και 24 ετών

ιιι) Να βρείτε το ποσοστό των ανδρών που η ηλικία τους υπερβαίνει τα 26 έτη

ιν) Να ομαδοποιήσετε τις παρατηρήσεις σας και να επαναλάβετε τα ερωτήματα (ii) και (iii).

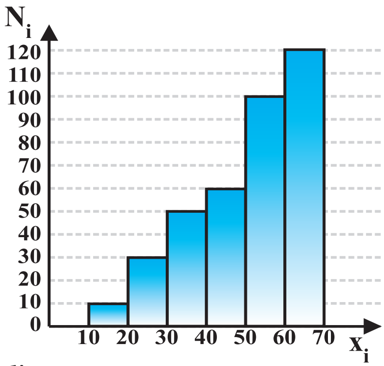
54. α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων για ομαδοποιημένα δεδομένα σε ισοπλατείς κλάσεις.

Κλάσεις	Κεντρικές τιμές x_i	Συχνότητα ν_i	Σχετική Συχνότητα f_i	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Αθρ. Σχετ. Συχνότητα F_i
5 -	7,5			10	
				30	
					0,25
		20	0,1		
					0,50
			0,1		
	Σύνολο:				

β) υπολογίστε πόσες παρατηρήσεις είναι:

ι) μικρότερες από 15   ιι) μικρότερες από 20   ιιι) μεγαλύτερες από 29

55. **Δίνεται το ιστόγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων ενός πειράματος με ομαδοποιημένα δεδομένα. Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων και το κυκλικό διάγραμμα.**

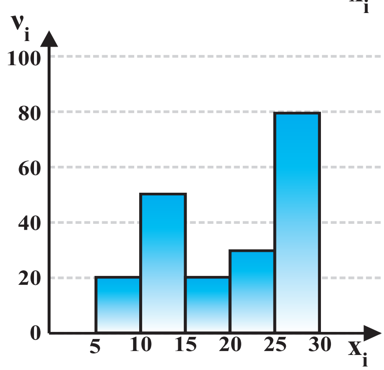


56. **Για το διπλανό ιστόγραμμα συχνοτήτων να κατασκευάσετε:**

α) τον πίνακα συχνοτήτων και αθροιστικών συχνοτήτων.

β) το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων.

γ) να υπολογίσετε γραφικά μέχρι ποια τιμή περίπου φτάνουν οι 40 πρώτες παρατηρήσεις.



57. **Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει τον αριθμό ελαττωματικών μπαταριών που βρέθηκαν σε 75 σωρούς παραγωγής των 500 μπαταριών. Να ομαδοποιήσετε τις παρατηρήσεις και κατόπιν:**

ι) Να κατασκευάσετε το πολύγωνο συχνοτήτων

ιι) Να κατασκευάσετε το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων

ιιι) Αν ένας σωρός απορρίπτεται όταν έχει πάνω από 15 ελαττωματικές μπαταρίες να βρείτε το ποσοστό των σωρών που γίνονται δεκτοί.

ιν) Αν απορρίψουμε το 40% των σωρών πόσες ελαττωματικές μπαταρίες θα βρούμε στον χειρότερο σωρό;

3	7	24	9	6	7	1	19	9	0	6	15	4
5	7	11	5	11	1	13	2	4	3	3	17	2
14	4	22	3	10	12	26	8	7	11	10	10	21
7	2	20	9	2	0	1	20	9	18	13	5	14
12	3	8	1	1	5	2	17	15	13	3	16	4
12	4	6	3	8	22	5	12	9	10			

58. Σε δείγμα 200 μαθητών χρονομετρήσαμε την ταχύτητά τους στην επίλυση μιας άσκησης.

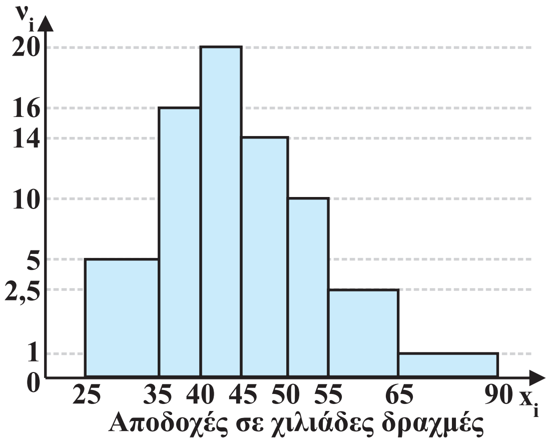
Ο πίνακας συχνοτήτων που δημιουργήσαμε είναι ο διπλανός.

Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.

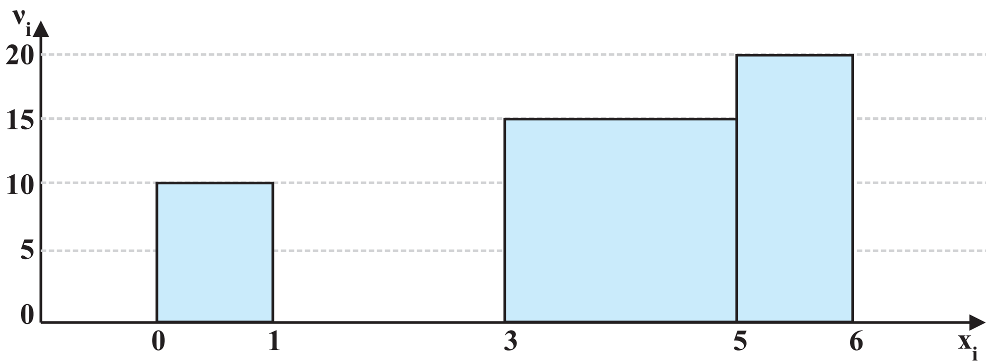
Χρόνος επίλυσης (sec)	Συχνότητα ν_i
20 - 60	20
60 - 80	15
80 - 100	35
100 - 140	40
140 - 220	90
Σύνολο:	200

59. Στο σχήμα που ακολουθεί έχουμε το ιστόγραμμα των εβδομαδιαίων αποδοχών ενός δείγματος από τους υπαλλήλους ενός οργανισμού. Να συμπληρώσετε τον αντίστοιχο πίνακα:

Αποδοχές σε χιλ. δρχ.	ν_i	F_i %
[25, 35)		
[35, 40)		
[40, 45)		
[45, 50)		
[50, 55)		
[55, 65)		
[65, 90)		
	80	



60. Στο παρακάτω ιστόγραμμα συχνοτήτων σβήστηκε κατά λάθος το ορθογώνιο της κλάσης [1, 3). Να κατασκευάσετε το ορθογώνιο αυτό.



2.3 Μέτρα Θέσης και Διασποράς

Απαραίτητες γνώσεις Θεωρίας

Θεωρία 1.

α) Τι είναι τα μέτρα θέσης και τι εκφράζουν;
β) Ποια είναι τα πιο συνηθισμένα μέτρα θέσης;

Απάντηση:

α) Τα μέτρα θέσης είναι αριθμητικά μεγέθη που μας δίνουν μια “κεντρική” τιμή των παρατηρήσεων μιας κατανομής και μπορούν να δώσουν μια εποπτική εικόνα για την κατανομή.

β) Τα πιο συνηθισμένα μέτρα θέσης είναι:

ι) η μέση τιμή **ιι)** ο σταθμικός μέσος **ιιι)** η διάμεσος
ιν) τα εκατοστημόρια **ν)** η επικρατούσα τιμή.

1. Μέση τιμή:

Η μέση τιμή είναι το πιο χρήσιμο μέτρο θέσης και ορίζεται σαν το πηλίκο του αθροίσματος των τιμών t_i της μεταβλητής που μελετάμε δια του πλήθους τους ν.

$$\bar{x} = \frac{t_1 + t_2 + ... + t_\nu}{\nu} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} t_i \quad (1)$$

Χρησιμοποιώντας τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων η μέση τιμή υπολογίζεται ως εξής:

$$\bar{x} = \frac{x_1\nu_1 + x_2\nu_2 + ... + x_\nu\nu_k}{\nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_k} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{k} x_i\nu_i \quad (2)$$

όπου ν_i είναι η συχνότητα της μεταβλητής x_i και ν το μέγεθος του δείγματος. Ισοδύναμα:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{k} x_i f_i \quad (3)$$

Ομαδοποιημένα δεδομένα:

Χρησιμοποιώντας τον πίνακα κατανομής συχ[redacted]
τιμή υπολογίζεται όπως παραπάνω με x_i την[redacted]

Παράδειγμα 13:

Σε δείγμα 25 συνδρομητών για τον αρ[redacted]
στις 10/12/01 πήραμε τις εξής απαντ[redacted]
5, 12, 13, 9, 12, 5, 7, 7, 9, 11, 1[redacted]
Να βρεθεί ο μέσος αριθμός κλήσ[redacted]

Ο μέσος αριθμός κλήσεων είνα[redacted]

Αν κατασκευάσουμε πίνακ[redacted] συχνοτήτων [redacted]

Αρ.[redacted]εων x_i	[redacted]	[redacted]
5	[redacted]	[redacted]
[redacted]	4	[redacted]
9	[redacted]	[redacted]
[redacted]	[redacted]	[redacted]

$x = \frac{1}{25}\sum^{8} x$[redacted]

Αν κ[redacted]
Ο[redacted]

[redacted]

Παρατήρηση:
Η διαφορά των τιμών στις δυο περιπτώσεις ήταν αναμενόμενη. Οφείλεται στο σφάλμα που επέρχεται από την ομαδοποίηση. Αν ομαδοποιούσαμε διαφορετικά τις παρατηρήσεις μας θα βρίσκα-με μια άλλη μέση τιμή!

Τα μειονεκτήματα και πλεονεκτήματα της μέσης τιμής παρατίθενται στον παρακάτω πίνακα.

Πλεονεκτήματα	Μειονεκτήματα
1. Υπολογίζεται εύκολα και είναι κατανοητή. 2. Ορίζεται μονοσήμαντα. 3. Για τον υπολογισμό της χρησιμοποιούνται όλες οι τιμές. 4. Είναι απαραίτητη για περαιτέρω υπολογισμούς.	1. Επηρεάζεται από ακραίες τιμές (outliers). 2. Δεν υπολογίζεται σε ποιοτικές μεταβλητές. 3. Δεν αντιστοιχεί πάντα σε δυνατή τιμή της μεταβλητής. 4. Δεν υπολογίζεται εύκολα σε ομαδοποιημένα δεδομένα με ανοικτές ακραίες κλάσεις.

2. Σταθμικός μέσος:

Χρησιμοποιείται για τιμές της μεταβλητής x_i με διαφορετικό συντελεστή στάθμισης ή βαρύτητας w_i .

$$\bar{x} = \frac{x_1w_1 + x_2w_2 + \dots + x_\nu w_\nu}{w_1 + w_2 + \dots + w_\nu} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{\nu} w_i} \quad (4)$$

Παρατήρηση:

i) Αν: $w_1 = w_2 = \dots = w_i = c$, $c \in R$, $i = 1 \dots \nu$, τότε ο σταθμικός μέσος ταυτίζεται με τη μέση τιμή.

ii) Πολλές φορές συμβολίζουμε το σταθμικό μέσο με $\bar{x}_w$

Παράδειγμα 14:

Εστω ότι για την εισαγωγή ενός υποψηφίου σε μια σχολή απαιτείται διαγωνισμός στα μαθήματα της έκθεσης, μαθηματικών, ιστορίας και φυσικής. Οι βαθμοί ενός υποψηφίου καθώς και οι συντελεστές στάθμισης φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Μάθημα:	Έκθεση	Μαθηματικά	Ιστορία	Φυσική
Συντελεστής Στάθμισης w_i	0,4	1,2	0,6	0,8
Βαθμός Γραπτού x_i	13	16	10	19

Να βρεθεί ο μέσος βαθμός του.

Ο μέσος βαθμός του είναι:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{4} w_i} = \frac{13 \cdot 0,4 + 16 \cdot 1,2 + 10 \cdot 0,6 + 19 \cdot 0,8}{0,4 + 1,2 + 0,6 + 0,8} = \frac{45,6}{3} = 15,2$$

3. Διάμεσος:

Διάμεσος **δ** είναι η τιμή από την οποία το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες ή ίσες και το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες ή ίσες.

Υπολογισμός:

Διατάσσουμε τις τιμές κατά αύξουσα σειρά και κατόπιν:

- Για περιττό πλήθος παρατηρήσεων η διάμεσος ισούται με τη "μεσαία" παρατήρηση. Η "μεσαία" διατεταγμένη παρατήρηση είναι η $X_{\frac{\nu+1}{2}}$ όπου ν είναι το πλήθος των παρατηρήσεων.
- Για άρτιο πλήθος παρατηρήσεων η διάμεσος ισούται με το ημιάθροισμα των δυο "μεσαίων" παρατηρήσεων. Οι "μεσαίες" διατεταγμένες παρατηρήσεις είναι οι $X_{\frac{\nu}{2}}$ και $X_{\frac{\nu}{2}+1}$ όπου ν είναι το πλήθος των παρατηρήσεων.

Παράδειγμα 15:

Να βρεθεί η διάμεσος για τα διπλανά δείγματα:

Δείγμα Α: 1 3 5 9 14 26 31

Δείγμα Β: 1 3 5 9 14 26 31 60

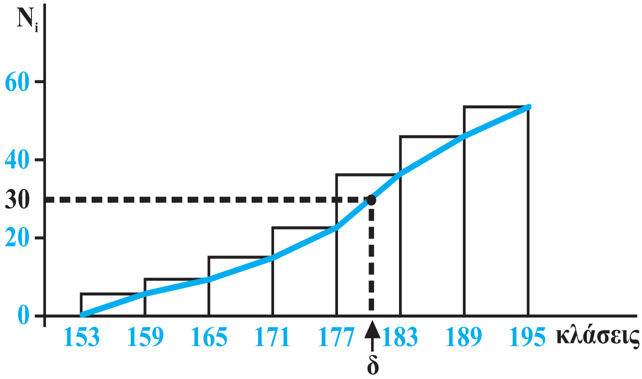
Για το δείγμα Α είναι: $\delta = x_4 = 9$, ενώ για το δείγμα Β είναι: $\delta = \frac{x_4 + x_5}{2} = \frac{9+14}{2} = 11,5$

Ομαδοποιημένα δεδομένα:

Από τον ορισμό της η διάμεσος έχει αθροιστική σχετική συχνότητα $F_i = 50\%$. Συνεπώς κατασκευάζοντας το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων %, φέρνουμε παράλληλη στον οριζόντιο άξονα από το σημείο (0, 50). Το σημείο τομής της παράλληλης με το πολύγωνο έχει συντεταγμένες (δ, 50).

Παράδειγμα 16:

Ποια είναι η διάμεσος του παραδείγματος 8;



Παρατήρηση:
Η παραπάνω μέθοδος μας δίνει με προσέγγιση τη διάμεσο, αφού η γραφική παράσταση δεν μπορεί να είναι απόλυτα ακριβής.

Πλεονεκτήματα	Μειονεκτήματα
1. Υπολογίζεται εύκολα και είναι κατανοητή.	1. Για τον υπολογισμό της δεν χρησιμοποιούνται όλες οι τιμές.
2. Ορίζεται μονοσήμαντα.	2. Δεν υπολογίζεται σε ποιοτικές μεταβλητές.
3. Δεν επηρεάζεται από ακραίες τιμές.	3. Δεν υπολογίζεται πάντα με ακρίβεια.
4. Υπολογίζεται σε ομαδοποιημένα δεδομένα με ανοικτές ακραίες κλάσεις	4. Δεν εφαρμόζεται εύκολα για περαιτέρω ανάλυση.

4. Εκατοστημόρια:

Εκατοστημόριο $P_κ$ είναι η τιμή για την οποία το πολύ κ% των παρατηρήσεων ειναι μικρότερες του $P_κ$ και το πολύ (100-κ)% των παρατηρήσεων ειναι μεγαλύτερες áðü áõôÞí.
Προφανώς: $δ = P_{50}$.
Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα **τεταρτημόρια:**

$P_{25} = Q_1$ $\qquad δ = P_{50} = Q_2$ $\qquad$ και: $\qquad P_{75} = Q_2$

Για να βρούμε τα Q_1 , Q_3 κάνουμε τα εξής:
Πρώτα βρίσκουμε τη διάμεσο δ. Κατόπιν βρίσκουμε τις διαμέσους για τις παρατηρήσεις δεξιά και αριστερά της δ.

Παράδειγμα 17:
Να βρεθεί η διάμεσος και τα τεταρτημόρια για τα παρακάτω δείγματα:
Δείγμα Α: 1 3 5 9 14 26 31
Δείγμα Β: 1 3 5 9 14 26 31 60

Για το δείγμα Α είναι: $Q_1 = 3$, $\delta = 9$, $Q_3 = 26$.

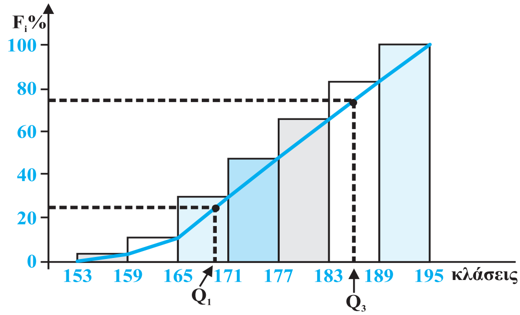
Για το δείγμα Β είναι: $Q_1 = \dfrac{3+5}{2} = 4$, $\delta = \dfrac{9+14}{2} = 11{,}5$, $Q_3 = \dfrac{26+31}{2} = 28{,}5$

Ομαδοποιημένα δεδομένα:

Τα εκατοστημόρια υπολογίζονται μέσω του πολυγώνου αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων όπως η διάμεσος. Ετσι το Q_1 υπολογίζεται φέρνοντας παράλληλη από το (0, 25) στον οριζόντιο άξονα κ.ο.κ.

Παράδειγμα 18:

Να βρεθούν τα τεταρτημόρια στο παράδειγμα 8.



5. Επικρατούσα τιμή:

Επικρατούσα τιμή ονομάζεται η τιμή της μεταβλητής με τη μεγαλύτερη συχνότητα. Η επικρατούσα τιμή δεν είναι μοναδική. Μια κατανομή συχνοτήτων μπορεί να έχει δυο ή περισσότερες επικρατούσες τιμές και θα ονομάζεται **δικόρυφη** ή **πολυκόρυφη** αντίστοιχα. Αν όλες οι τιμές έχουν την ίδια συχνότητα τότε δεν υπάρχει επικρατούσα τιμή.

Παράδειγμα 19:

Η επικρατούσα τιμή για τον αριθμό κλήσεων του παραδείγματος 13 είναι 7.

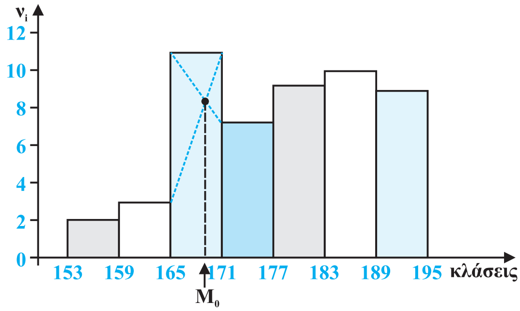
Ομαδοποιημένα δεδομένα:

Σε ομαδοποιημένα δεδομένα με ισοπλατείς κλάσεις για ποσοτικές μεταβλητές η επικρατούσα τιμή υπολογίζεται ως εξής:

Στο ιστόγραμμα συχνοτήτων πρώτα βρίσκουμε την **επικρατούσα κλάση.** Κατόπιν ενώνουμε το δεξί άκρο της άνω βάσης του ορθογωνίου με το δεξί άκρο της άνω βάσης του ορθογωνίου της αριστερής γειτονικής κλάσης. Μετά ενώνουμε το αριστερό άκρο της άνω βάσης με το αριστερό άκρο της άνω βάσης της δεξιάς γειτονικής κλάσης. Η προβολή του σημείου τομής των ευθυγράμμων τμημάτων πάνω στον οριζόντιο άξονα, είναι η επικρατούσα τιμή.

Παράδειγμα 20:

Η επικρατούσα τιμή στο διπλανό ιστόγραμμα συχνοτήτων είναι:



Τα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα της επικρατούσας τιμής φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Πλεονεκτήματα	Μειονεκτήματα
1. Εντοπίζεται αμέσως χωρίς υπολογισμούς στα μη ομαδοποιημένα δεδομένα και είναι κατανοητή. 2. Υπολογίζεται και σε ποιοτικές μεταβλητές. 3. Δεν επηρεάζεται από ακραίες τιμές. 4. Υπολογίζεται και με ελλειπή δεδομένα.	1. Για τον υπολογισμό της δεν χρησιμοποιούνται όλες οι τιμές. 2. Δεν ορίζεται μονοσήμαντα και δεν υπάρχει πάντα 3. Δεν εφαρμόζεται εύκολα για περαιτέρω ανάλυση.

Θεωρία 2.

α) Τι είναι τα μέτρα διασποράς και τι εκφράζουν;
β) Ποια είναι τα πιο συνηθισμένα μέτρα διασποράς;

Απάντηση:

α) Τα μέτρα διασποράς εκφράζουν τις αποκλίσεις των τιμών από τα μέτρα κεντρικής τάσης.

β) Τα πιο συνηθισμένα μέτρα διασποράς είναι:

ι) το εύρος **ιι)** η ενδοτεταρτημοριακή απόκλιση
ιιι) η διακύμανση ή διασπορά **ιν)** η τυπική απόκλιση **ν)** ο συντελεστής μεταβλητότητας.

1. Εύρος:

Εύρος ή κύμανση (Range) ονομάζεται η διαφορά της μικρότερης παρατήρησης του πειράματος από τη μεγαλύτερη. Δηλαδή:

$$R = x_{max} - x_{min} \quad (5)$$

Παράδειγμα 21:
Το εύρος των παρατηρήσεων του παραδείγματος 13 είναι: R = 13 – 5 = 8

Πλεονεκτήματα	Μειονεκτήματα
1. Υπολογίζεται εύκολα και είναι κατανοητό. 2. Βρίσκει εφαρμογή στην ομαδοποίηση.	1. Για τον υπολογισμό του λαμβάνονται υπ΄οψη μόνο οι ακραίες παρατηρήσεις γιαυτό είναι αναξιόπιστο.

2. Ενδοτεταρτημοριακό εύρος:

Ενδοτεταρτημοριακό εύρος είναι η διαφορά του πρώτου από το τρίτο τεταρτημόριο.

$$Q = Q_3 - Q_1 \quad (6)$$

Η ενδοτεταρτημοριακή απόκλιση είναι το διάστημα που περιέχει το 50% των παρατηρήσεων. Αρα όσο πιο μικρό είναι το διάστημα τόσο πιο μικρή θα είναι και η διασπορά των παρατηρήσεων.

Παράδειγμα 22:
Να βρεθεί το ενδοτεταρτημοριακό εύρος στο παρακάτω δείγμα:
Δείγμα Α: 1 3 5 9 14 26 31

Έχουμε:
$Q_1 = 3$, $\delta = 9$, $Q_3 = 26$ και: $Q = 26 - 3 = 23$

3. Διακύμανση:

Η διακύμανση ή δειγματική διασπορά s^2 εκφράζει το μέσο όρο των τετραγώνων των αποκλίσεων των τιμών από τη μέση τιμή και υπολογίζεται από τους τύπους:

$$s^2 = \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{v}(x_i - \bar{x})^2 \quad (7)$$

$$s^2 = \frac{1}{v}\left\{\sum_{i=1}^{v}x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{v}x_i\right)^2}{v}\right\} \quad (8)$$

Παρατήρηση:
Οι τύποι (7) και (9) χρησιμοποιούνται στις περιπτώσεις που η μέση τιμή είναι ακέραια ή έχει ελάχιστα δεκαδικά ψηφία ώστε να μην χρειαστεί κατά τις πράξεις να κάνουμε στρογγυλοποιήσεις που επιφέρουν σφάλματα.

Για πίνακα συχνοτήτων ή ομαδοποιημένα δεδομένα έχουμε:

$$s^2 = \frac{1}{v}\left\{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^2 v_i\right\} \quad (9)$$

$$s^2 = \frac{1}{v}\left\{\sum_{i=1}^{k}x_i^2 v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k}x_i v_i\right)^2}{v}\right\} \quad (10)$$

όπου: x_1, x_2, …x_k ειναι οι διαφορετικές τιμές της μεταβλητής ή οι κεντρικές τιμές των κλάσεων v_1, v_2, ..v_k, είναι οι αντίστοιχες συχνότητες και ν το μέγεθος του δείγματος.

Παράδειγμα 23:
Ο αριθμός επισκέψεων 15 ατόμων σε οδοντογιατρό τα τελευταία 2 χρόνια φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

2	**3**	**2**	**1**	**1**	**4**	**1**	**3**	**2**	**2**	**1**	**3**	**3**	**4**	**1**

Να υπολογιστεί η διακύμανση με τους τύπους (7) - (10).

Εχουμε: $\bar{x} = \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15}t_i = \frac{1}{15}(2+3+2+....+4+1) = \frac{33}{15} = 2,2$

Με τον τύπο (7) έχουμε:

$$s^2 = \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15}(x_i - 2,2)^2 = \frac{1}{15}\left[(2-2,2)^2 + (3-2,2)^2 + ... + (1-2,2)^2\right] = \frac{1}{15}\cdot 16,4 \approx 1,09$$

Με τον τύπο **(8)** έχουμε: $\sum_{i=1}^{15} x_i^2 = 2^2 + 3^2 + 2^2 + \dots\dots + 4^2 + 1^2 = 89$

$$s^2 = \frac{1}{15}\left\{\sum_{i=1}^{15} x_i^{\ 2} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{15} x_i\right)^2}{v}\right\} = \frac{1}{15}\left(89 - \frac{(33)^2}{15}\right) \approx 1,0$$

Για τον τύπο **(9)** κατασκευάζουμε τον παρακάτω βοηθητικό πίνακα:

x_i	v_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 v_i$
1	5	-1,2	1,44	7,2
2	4	-0,2	0,04	0,16
3	4	0,8	0,64	2,56
4	2	1,8	3,24	6,48
	15			16,4

Αρα: $s^2 = \frac{1}{15}\left\{\sum_{i=1}^{4} (x_i - \bar{x})^2 v_i\right\} = \frac{1}{15} \cdot 16,4 \approx 1,09$

Για τον τύπο **(10)** κατασκευάζουμε τον παρακάτω βοηθητικό πίνακα:

x_i	v_i	$x_i v_i$	x_i^2	$x_i^2 v_i$
1	5	5	1	5
2	4	8	4	16
3	4	12	9	36
4	2	8	16	32
	15	33		89

Αρα: $s^2 = \frac{1}{15}\left\{\sum_{i=1}^{4} x_i^{\ 2} v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{4} x_i v_i\right)^2}{15}\right\} = \frac{1}{15}\left(89 - \frac{(33)^2}{15}\right) \approx 1,0$

4. Τυπική απόκλιση:

Επειδή η διασπορά δεν εκφράζεται στις ίδιες μονάδες με τη μεταβλητή ορίζουμε την **τυπική απόκλιση** η οποία δίνεται από τον τύπο:

$$s = \sqrt{s^2} \quad (11)$$

Παράδειγμα 24:

Η τυπική απόκλιση του παραδείγματος 23 είναι: $s = \sqrt{1{,}09} \approx 1{,}04$

5. Συντελεστής μεταβολής (CV):

Ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας CV εκφράζει ένα μέτρο **σχετικής διασποράς** δηλαδή εκφράζει τη μεταβλητότητα των τιμών ανεξάρτητα από τη μέση τιμή και ορίζεται από τον τύπο:

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} \quad (12)$$

Ο συντελεστής μεταβλητότητας αποδίδεται σε ποσοστό % και είναι ανεξάρτητος μονάδων μέτρησης. Γενικά όταν σε μια κατανομή έχουμε $CV \leq 10\%$ τότε λέμε ότι το δείγμα είναι **ομοιογενές.**

Παράδειγμα 25:

Ο συντελεστής μεταβλητότητας του παραδείγματος 23 είναι: $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{1{,}04}{2{,}2} = 47{,}27\%$

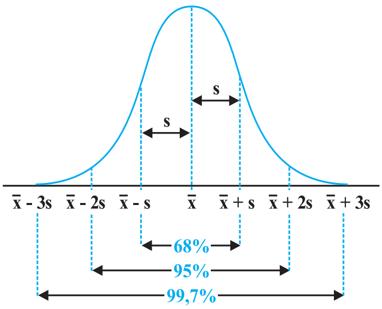
Θεωρία 3.

Τι ισχύει για τις παρατηρήσεις σε μια κανονική ή περίπου κανονική κατανομή;

Σε μια κανονική ή περίπου κανονική κατανομή ισχύει:

- **Στο διάστημα $(\bar{x}-s, \bar{x}+s)$ περιέχεται περίπου το 68% των παρατηρήσεων.**
- **Στο διάστημα $(\bar{x}-2s, \bar{x}+2s)$ περιέχεται περίπου το 95% των παρατηρήσεων.**
- **Στο διάστημα $(\bar{x}-3s, \bar{x}+3s)$ περιέχεται περίπου το 99,7% των παρατηρήσεων.**

Παρατήρηση:
Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι: $R \approx 6s$



Θεωρία 4.

α) Πώς θα μεταβληθούν τα μέτρα θέσης όταν οι τιμές της μεταβλητής αυξηθούν κατά μια σταθερά $c \neq 0$;
β) Πώς θα μεταβληθούν τα μέτρα θέσης όταν οι τιμές της μεταβλητής πολλαπλασιαστούν επί μια σταθερά $\lambda \neq 0$;

α) Εστω x_i, $i=1\ldots\nu$ οι τιμές της μεταβλητής και $y_i=x_i+c$, $i=1\ldots\nu$ οι προσαυξημένες τιμές.

Για τη μέση τιμή $\bar{y}$ έχουμε:

$$\bar{y}=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}y_i=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(x_i+c)=\frac{1}{\nu}\left(\sum_{i=1}^{\nu}x_i+\sum_{i=1}^{\nu}c\right)=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}x_i+\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}c=\bar{x}+\frac{1}{\nu}\nu c=\bar{x}+c$$

Άρα: $\boxed{\bar{y}=\bar{x}+c}$

Για τη διάμεσο δ_y έχουμε:

ι) Για ν άρτιο: $\delta_y=\dfrac{y_{\frac{\nu}{2}}+y_{\frac{\nu}{2}+1}}{2}=\dfrac{\left(x_{\frac{\nu}{2}}+c\right)+\left(x_{\frac{\nu}{2}+1}+c\right)}{2}=\dfrac{x_{\frac{\nu}{2}}+x_{\frac{\nu}{2}+1}}{2}+c=\delta_x+c$

ιι) Για ν περιττό: $\delta_y=y_{\frac{\nu+1}{2}}=x_{\frac{\nu+1}{2}}+c=\delta_x+c$

Άρα: $\boxed{\delta_y=\delta_x+c}$

Προφανώς για την επικρατούσα τιμή ισχύει: $\boxed{M_{O_y}=M_{O_x}+c}$

β) Εστω x_i, $i=1\ldots\nu$ οι τιμές της μεταβλητής και: $w_i=\lambda x_i$, $i=1\ldots\nu$, οι προσαυξημένες τιμές.

Για τη μέση τιμή $\bar{w}$ έχουμε: $\bar{w}=\dfrac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}w_i=\dfrac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(\lambda x_i)=\lambda\dfrac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}x_i=\lambda\bar{x}$

Άρα: $\boxed{\bar{w}=\lambda\bar{x}}$

Για τη διάμεσο δ_w έχουμε:

ι) Για ν άρτιο: $\delta_w=\dfrac{w_{\frac{\nu}{2}}+w_{\frac{\nu}{2}+1}}{2}=\dfrac{\lambda x_{\frac{\nu}{2}}+\lambda x_{\frac{\nu}{2}+1}}{2}=\lambda\dfrac{x_{\frac{\nu}{2}}+x_{\frac{\nu}{2}+1}}{2}=\lambda\delta_x$

ιι) Για ν περιττό: $\delta_w=w_{\frac{\nu+1}{2}}=\lambda x_{\frac{\nu+1}{2}}=\lambda\delta_x$

Άρα: $\boxed{\delta_w=\lambda\delta_x}$

Προφανώς για την επικρατούσα τιμή ισχύει: $\boxed{M_{O_w}=\lambda M_{O_x}}$

Θεωρία 5.

α) Πώς θα μεταβληθούν τα μέτρα διασποράς όταν οι τιμές της μεταβλητής αυξηθούν κατά μια σταθερά $c \neq 0$;
β) Πώς θα μεταβληθούν τα μέτρα διασποράς όταν οι τιμές της μεταβλητής πολλαπλασιαστούν επί μια σταθερά $\lambda \neq 0$;

ά) Εστω x_i, $i=1\ldots\nu$, οι τιμές της μεταβλητής και $y_i = x_i + c$, $i=1\ldots\nu$, οι προσαυξημένες τιμές.
Για το εύρος R έχουμε: $R_y = y_{max} - y_{min} = (x_{max} + c) - (x_{min} + c) = x_{max} - x_{min} = R_x$

Άρα: $\boxed{R_y = R_x}$

Για τη διασπορά $s_y{}^2$ έχουμε:

$$s_y^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}\left[(x_i + c) - (\bar{x} + c)\right]^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(x_i - \bar{x})^2 = s_x^2$$

Άρα: $\boxed{s_y^2 = s_x^2}$

Προφανώς για την τυπική απόκλιση ισχύει: $\boxed{s_y = s_x}$

β) Εστω x_i, $i=1\ldots\nu$, οι τιμές της μεταβλητής και $w_i = \lambda x_i$, $i=1\ldots\nu$, οι προσαυξημένες τιμές.
Για το εύρος R έχουμε:
Για $\lambda > 0$: $R_w = w_{max} - w_{min} = \lambda x_{max} - \lambda x_{min} = \lambda(x_{max} - x_{min}) = \lambda R_x$

Για $\lambda < 0$: $R_w = w_{max} - w_{min} = \lambda x_{min} - \lambda x_{max} = \lambda(x_{min} - x_{max}) = -\lambda R_x$

Άρα: $\boxed{R_w = \lambda R_x}$

Για τη διασπορά $s_w{}^2$ έχουμε:

$$s_w^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(w_i - \bar{w})^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(\lambda x_i - \lambda\bar{x})^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}\lambda^2(x_i - \bar{x})^2 = \lambda^2\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(x_i - \bar{x})^2 = \lambda^2 s_x^2$$

Άρα: $\boxed{s_w^2 = \lambda^2 s_x^2}$

Για την τυπική απόκλιση έχουμε: $s_w = \sqrt{s_w^2} = \sqrt{\lambda^2 s_x^2} = \sqrt{\lambda^2}\sqrt{s_x^2} = |\lambda| s_x$

Άρα: $\boxed{s_w = |\lambda| s_x}$

Λυμένες Ασκήσεις.

1. Η μέση τιμή δέκα αριθμών είναι 6,4. Οι επτά από αυτούς τους αριθμούς είναι οι 3, 3, 4, 5, 6, 6, 7. Να βρείτε τους άλλους τρείς αριθμούς αν γνωρίζουμε ότι είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με διαφορά ω = 3.

Λύση:

Εστω α, β, γ οι άγνωστοι αριθμοί. Τότε:

$$\overline{x}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}x_i \Leftrightarrow 6,4=\frac{1}{10}(3+3+....+7+\alpha+\beta+\gamma)\Leftrightarrow 64=34+\alpha+\beta+\gamma \Leftrightarrow 30=\alpha+\beta+\gamma \quad \textbf{(1)}$$

Οι α, β, γ, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με διαφορά $\omega = 3$ άρα $\beta = \alpha + 3$

και $\gamma = \alpha + 6$. Αρα: **(1)** $\Leftrightarrow \alpha+\alpha+3+\alpha+6=30 \Leftrightarrow 3\alpha+9=30 \Leftrightarrow \alpha=\frac{21}{3}=7$

Αρα: $\alpha = 7$, $\beta = 10$, $\gamma = 13$.

2. Η βαθμολογία ενός μαθητή στα τέσσερα τεστ ενός μαθήματος ήταν (σε εκατοντα-βάθμια κλίμακα): 55, 30, 92, 49. Οι συντελεστές βαρύτητας σε καθένα ήταν αντίστοιχα 1, 2, 2 και 3.

α) Να βρείτε τη μέση επίδοση του μαθητή στα τεστ.

β) Να αλλάξετε σειρά στους συντελεστές βαρύτητας ώστε ο μαθητής να έχει

ι) την καλύτερη δυνατή μέση επίδοση.

ιι) την χειρότερη δυνατή μέση επίδοση.

Λύση:

α) Η μέση επίδοση του μαθητή θα είναι:

$$\overline{x}=\frac{\sum_{i=1}^{4}x_i w_i}{\sum_{i=1}^{4}w_i}=\frac{55\cdot 1+30\cdot 2+92\cdot 2+49\cdot 3}{1+2+2+3}=\frac{446}{8}=55,75$$

β) Για την καλύτερη δυνατή μέση επίδοση πρέπει ο μεγαλύτερος βαθμός να αντιστοιχεί στον μεγαλύτερο συντελεστή βαρύτητας και ο μικρότερος στον μικρότερο. Αρα η καλύτερη δυνατή μέση επίδοση θα είναι:

$$\overline{x}=\frac{\sum_{i=1}^{4}x_i w_i}{\sum_{i=1}^{4}w_i}=\frac{30\cdot 1+55\cdot 2+49\cdot 2+92\cdot 3}{1+2+2+3}=\frac{514}{8}=64,25$$

Για την χειρότερη δυνατή μέση επίδοση πρέπει ο μικρότερος βαθμός να αντιστοιχεί στον μεγαλύτερο συντελεστή βαρύτητας και ο μεγαλύτερος στον μικρότερο. Αρα η χειρότερη δυνατή μέση επίδοση θα είναι:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{4} w_i} = \frac{92 \cdot 1 + 55 \cdot 2 + 49 \cdot 2 + 30 \cdot 3}{1+2+2+3} = \frac{390}{8} = 48,75$$

3. Εστω οι παρατηρήσεις 1, 3, 6, 8, 2, 4, 1, 6, 2, 8, 9, 5, 1, 4, 2, 2, 1, 3, 3, 5. Να υπολογίσετε
α) τη μέση τιμή β) τη διάμεσο γ) την επικρατούσα τιμή
δ) την τυπική απόκλιση ε) το συντελεστή μεταβολής.

Λύση:

α) $\bar{x} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} x_i = \frac{1}{20}(1+3+....+3+5) = \frac{76}{20} = 3,8$

β) Διατάσουμε το δείγμα: 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 8, 8, 9

Τότε: $\delta = \frac{x_{10} + x_{11}}{2} = \frac{3+3}{2} = 3$

γ) Υπάρχουν δυο επικρατούσες τιμές οι $M_{0_1} = 1$ και $M_{0_2} = 2$

δ) Εχουμε x_i^2: 1, 1, 1, 1, 4, 4, 4, 4, 9, 9, 9, 16, 16, 25, 25, 36, 36, 64, 64, 81.

Άρα: $\sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 410$

$$s^2 = \frac{1}{20}\left\{\sum_{i=1}^{20} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{20} x_i\right)^2}{20}\right\} = \frac{1}{20}\left(410 - \frac{76^2}{20}\right) = \frac{410-288,8}{20} = \frac{121,2}{20} = 6,06$$

Άρα: $s = \sqrt{6,06} \approx 2,46$

ε) $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2,46}{3,8} = 0,647 = 64,7\%$

4. Ο παρακάτω πίνακας μας δίνει την κατανομή των χρόνων (σε min.) 50 τηλεφωνικών κλήσεων που πραγματοποιήθηκαν από ένα συνδρομητή.

Χρόνος τηλ. κλήσης	Συχνότητα v_i
2 - 4	7
4 - 6	
6 - 8	
8 - 10	14
10 - 12	18
	50

α) Αν η μέση διάρκεια είναι 8,2 min να υπολογίσετε τις συχνότητες που λείπουν.

β) Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση.

γ) Να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβολής.

Λύση:

α) Εστω y και ω οι συχνότητες που λείπουν. Τότε $7 + 14 + 18 + y + \omega = 50 \Leftrightarrow y + \omega = 11 \Leftrightarrow y = 11 - \omega$ **(1)**

Επίσης:

$$\bar{x} = \frac{1}{50}\sum_{i=1}^{5} x_i v_i \Leftrightarrow 8,2 = \frac{3\cdot 7 + 5\cdot y + 7\omega + 9\cdot 14 + 11\cdot 18}{50} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 410 = 345 + 5(11-\omega) + 7\omega \Leftrightarrow$$

$410 - 400 = 7\omega - 5\omega \Leftrightarrow 5 = \omega$. Άρα: $y = 11 - 5 = 6$.

β) Για την τυπική απόκλιση κατασκευάζουμε τον παρακάτω βοηθητικό πίνακα:

x_i	v_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 v_i$
3	7	-5,2	27,04	189,28
5	6	-3,2	10,24	61,44
7	5	-1,2	1,44	7,2
9	14	0,8	0,64	8,96
11	18	2,8	7,84	141,12
	50			408

Άρα: $s^2 = \frac{1}{50}\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2 v_i = \frac{408}{50} = 8,16$. Άρα: $s = \sqrt{8,16} \approx 2,86$

γ) $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2,86}{8,2} \approx 0,349$ ή $34,9\%$

5. Εστω το διατεταγμένο δείγμα ακεραίων: 1, 2, 7, 9, x, y, z, 12, 16, 20 με $x \neq y \neq z$. Αν η μέση τιμή είναι 10, να βρεθούν:

α) η διάμεσος **β) η διακύμανση** **γ) η τυπική απόκλιση**

δ) ο συντελεστής μεταβολής.

Λύση:

α) $\bar{x} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i \Leftrightarrow 10 = \frac{1}{10}(1+2+...16+20) \Leftrightarrow 100 = 67 + x + y + z \Leftrightarrow 33 = x + y + z$ **(1)**

Επειδή $x \neq y \neq z$, οι ακέραιες διατεταγμένες τριάδες (x, y, z) είναι (x, y, z) = (9, 10, 11) και (x, y, z) = (10, 11, 12)

Από αυτές μόνο η δεύτερη ικανοποιεί την **(1)** άρα: (x, y, z) = (10, 11, 12)

Αρα: $\delta = \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{10+11}{2} = 10,5$

β) Για την διακύμανση έχουμε:

x_i	1	2	7	9	10	11	12	12	16	20	
$x_i - \bar{x}$	-9	-8	-3	-1	0	1	2	2	6	10	
$(x_i - \bar{x})^2$	81	64	9	1	0	1	4	4	36	100	$\sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})^2 = 300$

Άρα: $s^2 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{300}{10} = 30$

γ) $s = \sqrt{30} \approx 5,477$

δ) $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{5,477}{10} = 0,5477$ ή $54,77\%$

6. **Σε 20 γραπτά μαθητών της Β΄Λυκείου η μέση τιμή των βαθμών του Α΄ Βαθμολογητή είναι 15. Ο Β΄ Βαθμολογητής έβαλε 1 μονάδα λιγότερη σε 12 γραπτά και 3 μονάδες περισσότερες σε 3 γραπτά. Να βρεθεί η μέση τιμή των βαθμών του Β΄ Βαθμολογητή.**

Λύση:

Εστω: x_i i = 1…20 οι βαθμοί του Α΄ Βαθμολογητή και y_i i = 1…20, οι βαθμοί του Β΄ Βαθμολογητή. Τότε:

$$\bar{y} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} y_i = \frac{1}{20}\left[\sum_{i=1}^{12} y_i + \sum_{i=13}^{15} y_i + \sum_{i=16}^{20} y_i\right] = \frac{1}{20}\left[\sum_{i=1}^{12}(x_i - 1) + \sum_{i=13}^{15}(x_i + 3) + \sum_{i=16}^{20} x_i\right] =$$

$$= \frac{1}{20}\left[\sum_{i=1}^{12} x_i - 12 + \sum_{i=13}^{15} x_i + 9 + \sum_{i=16}^{20} x_i\right] = \frac{1}{20}\left[\sum_{i=1}^{20} x_i - 3\right] = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} x_i - \frac{3}{20} = \bar{x} - 0,15 = 14,85$$

7. Σε μια κανονική κατανομή το 2,35% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκονται στο διάστημα (10,16). Να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής. Είναι το δείγμα ομοιογενές;

Λύση:

1η περίπτωση: $(24,\ 28) = (\bar{x}+2s, \bar{x}+3s)$. Άρα: $\begin{cases} \bar{x}+2s = 24 \\ \bar{x}+3s = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{x} = 16 \\ s = 4 \end{cases}$

Άρα: $CV = \dfrac{s}{\bar{x}} = \dfrac{4}{16} = 0,25$ ή 25%

2η περίπτωση: $(24,\ 28) = (\bar{x}-3s, \bar{x}-2s)$. Άρα: $\begin{cases} \bar{x}-3s = 24 \\ \bar{x}-2s = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{x} = 36 \\ s = 4 \end{cases}$

Άρα: $CV = \dfrac{s}{\bar{x}} = \dfrac{4}{36} = 0,111$ ή 11,1%

Άρα και στις δυο περιπτώσεις το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

8. Οι τιμές πώλησης δέκα ηλεκτρικών συσκευών (σε ευρώ) είναι:
225, 250, 250, 210, 280, 300, 280, 250, 240 και 235.

α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο και να βρείτε την επικρατούσα τιμή.

β) Εάν τα είδη πουληθούν με 12% έκπτωση, ποια από τα παραπάνω μεγέθη θα αλλάξουν και πως;

γ) Εάν οι πελάτες επιβαρυνθούν με 10 € επιπλέον στη τιμή αγοράς για έξοδα μεταφοράς, ποια από τα παραπάνω μεγέθη θα αλλάξουν και πώς;

Λύση:

α) $\bar{x} = \dfrac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i = \dfrac{1}{10}(225+250+...240+235) = \dfrac{2520}{10} = 252$

Διατάσουμε τις παρατηρήσεις: 210, 225, 235, 240, 250, 250, 250, 280, 280, 300.

$\delta = \dfrac{x_5 + x_6}{2} = \dfrac{250+250}{2} = 250 \qquad M_{O_x} = 250$

β) Έστω: y_i $i = 1....10$, οι τιμές με την έκπτωση. Τότε: $y_i = x_i \cdot 0,88 \quad i = 1....10$

Άρα: $\bar{y} = \bar{x} \cdot 0,88 = 252 \cdot 0,88 = 221,76$

$\delta_y = \delta_x \cdot 0,88 = 250 \cdot 0.88 = 220$

$M_{Oy} = M_{O_x} \cdot 0,88 = 250 \cdot 0,88 = 220$

γ) Εστω: w_i $i = 1....10$, οι τιμές με την επιβάρυνση. Τότε: $w_i = y_i + 10 \qquad i = 1....10$

Άρα: $\bar{w} = \bar{y} + 10 = 221,76 + 10 = 231,76$

$\delta_w = \delta_y + 10 = 250 + 10 = 260$

$M_{O_w} = M_{O_y} + 10 = 250 + 10 = 260$

Ερωτήσεις Σωστό – Λάθος.

1. Η μέση τιμή $\bar{x}$ είναι ένα μέτρο θέσης. ( )

2. Η μέση τιμή $\bar{x}$ είναι ο σταθμικός μέσος που έχει όλους τους συντελεστές βαρύτητας w_i ίσους με 1. ( )

3. Ο σταθμικός μέσος $\bar{x}$ χρησιμοποιείται σε όλες τις περιπτώσεις όπως και ο αριθμητικός μέσος. ( )

4. Η διάμεσος δ ενός δείγματος είναι ένα μέτρο διασποράς. ( )

5. Διάμεσος δ ενός δείγματος ν παρατηρήσεων είναι η τιμή για την οποία το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από αυτήν και το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από την τιμή αυτή. ( )

6. Διάμεσος δ ενός δείγματος ν παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά ορίζεται ως η μεσαία παρατήρηση, όταν ο ν είναι περιττός αριθμός. ( )

7. Διάμεσος δ ενός δείγματος ν παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά ορίζεται η ημιδιαφορά των δύο μεσαίων παρατηρήσεων όταν ο ν είναι άρτιος αριθμός. ( )

8. Για να βρούμε τη διάμεσο δ πρέπει να διατάξουμε το δείγμα. ( )

9. Η διάμεσος δ αντιστοιχεί πάντα σε μια υπαρκτή τιμή της μεταβλητής. ( )

10. Μια κατανομή συχνοτήτων λέγεται κανονική όταν η καμπύλη συχνοτήτων έχει κωδωνοειδή μορφή. ( )

11. Αν το μέγεθος του δείγματος είναι περιττός αριθμός τότε η διάμεσος δ ισούται με τη μέση τιμή. ( )

12. Σε δείγμα 21 παρατηρήσεων, η διάμεσος δ είναι η 11η διατεταγμένη παρατήρηση. ( )

13. Η διάμεσος δ είναι το δεύτερο τεταρτημόριο. ( )

14. Επικρατούσα τιμή M_0 ενός δείγματος ν παρατηρήσεων είναι η τιμή με τη μεγαλύτερη σχετική συχνότητα. ( )

15. Ορίζουμε ως κ εκατοστιαίο σημείο ή $P_κ$ εκατοστημόριο ενός συνόλου παρατηρήσεων την τιμή εκείνη για την οποία το πολύ κ% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες του $P_κ$ και το πολύ (100 - κ)% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από την τιμή αυτή. ( )

16. Για το Q_1 τεταρτημόριο ενός συνόλου παρατηρήσεων διατεταγμένων κατά αύξουσα σειρά έχουμε αριστερά το πολύ 75% των παρατηρήσεων και δεξιά το πολύ 25% των παρατηρήσεων. ( )

17. Έχουμε τις παρατηρήσεις: 0 1 1 2 2 2 3 4 5.
    α) Η διάμεσος δ είναι 2. ( )
    β) Το τεταρτημόριο Q_1 είναι ίσο με 1. ( )
    γ) Το τεταρτημόριο Q_3 είναι ίσο με 4. ( )

18. Η επικρατούσα τιμή M_0 είναι η μεγαλύτερη παρατήρηση. ( )
19. Η επικρατούσα τιμή M_0 είναι μοναδική . ( )
20. Η επικρατούσα τιμή M_0 των παρατηρήσεων 0 1 2 2 3 3 5 6 6 6 7 είναι ο αριθμός 7. ( )
21. Τα μέτρα διασποράς εκφράζουν τις αποκλίσεις των τιμών γύρω από τα μέτρα κεντρικής τάσης. ( )
22. Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος δίνεται από τον τύπο: $Q = P_{75} - P_{25}$. ( )
23. Η διακύμανση s^2 είναι πάντα θετικός αριθμός. ( )
24. Η τυπική απόκλιση s είναι πάντα θετικός αριθμός. ( )
25. Ισχύει σε κάθε κατανομή: $R \approx 6S$. ( )
26. Ισχύει: $\sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i = \alpha^{\nu}$ ( )
27. Ισχύει: $\sum_{i=1}^{\nu} (\alpha_i + \beta_i) = \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i + \sum_{i=1}^{\nu} \beta_i$ ( )
28. Ισχύει: $\sum_{i=1}^{\nu} \alpha = \nu\alpha$ ( )
29. Ο συντελεστής μεταβολής δίνεται από τον τύπο: $CV = \bar{x} / s$. ( )
30. Ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας (CV) είναι ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης. ( )
31. Ο συντελεστής μεταβλητότητας εκφράζει τη μεταβλητότητα των δεδομένων απαλλαγμένη από την επίδραση της μέσης τιμής. ( )
32. Ο συντελεστής μεταβλητότητας (CV) παριστάνει ένα μέτρο απόλυτης διασποράς και όχι σχετικής διασποράς. ( )
33. Ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής είναι ομοιογενές αν ο συντελεστής μεταβλητότητας ξεπερνά το 10%. ( )
34. Αν οι παρατηρήσεις εκφράζονται σε cm και η διακύμανση εκφράζεται σε cm. ( )
35. Το εύρος ή κύμανση R ενός δείγματος ν παρατηρήσεων ορίζεται ως το άθροισμα της μεγαλύτερης και της μικρότερης παρατήρησης. ( )
36. Το εύρος R ενός δείγματος βασίζεται στις δύο ακραίες παρατηρήσεις και είναι αξιόπιστο μέτρο διασποράς. ( )
37. Η διακύμανση ή διασπορά s^2 είναι ο μέσος όρος των τετραγώνων των αποκλίσεων των t_i παρατηρήσεων από τη μέση τιμή τους. ( )
38. Αν $w_i = \lambda x_i$, $\lambda \in R^*$ $i = 1 \ldots \nu$ τότε: $s_w = \lambda s_x$ ( )
39. Αν $y_i = x_i + c$, $c \in R^*$ $i = 1 \ldots \nu$ τότε: $\bar{y} = \bar{x} + c$ ( )

Ερωτήσεις Πολλαπλής Επιλογής.

1. Έστω το δείγμα: 12 14 15 14 15 13 17 16 15 58 1600. Το πιο κατάλληλο μέτρο θέσης θα ήταν:
α) Η διάμεσος. β) Η επικρατούσα τιμή. γ) Το εύρος. δ) Η μέση τιμή. ε) Ολα τα προηγούμενα.

2. Στις περιπτώσεις που δίνεται έμφαση (διαφορετική βαρύτητα) στις τιμές: $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, ενός συνόλου δεδομένων σαν μέτρο θέσης χρησιμοποιούμε:
α) τη διάμεσο β) τον αριθμητικό μέσο γ) τον σταθμικό μέσο
δ) τα εκατοστημόρια ε) την επικρατούσα τιμή

3. Σε ένα δείγμα μεγέθους ν, αν οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X είναι: $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$, τότε η μέση τιμή $\bar{x}$ ισούται με:

α) $\frac{1}{\nu^2}\sum_{i=1}^{\nu} t_i$ β) $\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} t_i$ γ) $\frac{1}{\nu^2}\sum_{i=1}^{\nu} t_i^2$

δ) $\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} t_i^2$ ε) $\frac{1}{\nu-1}\sum_{i=1}^{\nu} t_i$

4. Στο παρακάτω δείγμα: 3 4 8 1 1 5 3 1 2 2, η μέση τιμή $\bar{x}$ είναι:
α) 3 β) 1 γ) 2 δ) 4 ε) 4,3

5. Αν το δείγμα: 3 1 5 4 3 x 2, έχει μέση τιμή $\bar{x} = 3$, τότε η άγνωστη παρατήρηση x θα είναι:
α) 1 β) 0 γ) 2 δ) 3 ε) 4

6. Σε ένα δείγμα μεγέθους ν, αν: $x_1, x_2, \ldots, x_\kappa$, είναι οι τιμές της μεταβλητής X με συχνότητες αντίστοιχα: $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\kappa$ και αν: f_i οι σχετικές συχνότητες, ποια (ή ποιες) από τις παρακάτω σχέσεις δεν ορίζει τη μέση τιμή $\bar{x}$ του δείγματος

α) $\bar{x} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa} x_i \nu_i$ β) $\bar{x} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa} x_i^2 f_i$ γ) $\bar{x} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa} x_i f_i$

δ) οι σχέσεις (α) και (γ). ε) οι σχέσεις (α) και (β).

7. Το διπλανό δείγμα: 1 3 2 1 7 8 11 22 14, έχει εύρος:
α) 22 β) 21 γ) 1 δ) 11 ε) 7

8. Αν σε κάθε τιμή: $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ ενός συνόλου δεδομένων δώσουμε διαφορετική βαρύτητα που εκφράζεται με τους συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας): $w_1, w_2, \ldots, w_\nu$, τότε ο σταθμικός μέσος βρίσκεται από τον τύπο:

α) $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i w_i}{\nu}$ β) $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{\nu} \nu_i}$ γ) $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{\nu} w_i}$

δ) $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{\nu} x_i}$ ε) $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{\nu} \nu_i^2}$

9. Το διπλανό δείγμα: 3 12 4 10 8 19 9 1 14, έχει διάμεσο:
α) 8 β) 9 γ) 10 δ) 19 ε) 14

10. Για να βρούμε γραφικά τη διάμεσο σε ομαδοποιημένα δεδομένα χρησιμοποιούμε:
α) Τον πίνακα αθροιστικών συχνοτήτων.
β) Το πολύγωνο συχνοτήτων.
γ) Το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.
δ) Δεν υπάρχει διάμεσος σε ομαδοποιημένα δεδομένα.
ε) Τίποτε από τα παραπάνω.

11. Η επικρατούσα τιμή είναι:
α) η μεγαλύτερη τιμή της μεταβλητής.
β) το ημιάθροισμα των ακραίων τιμών.
γ) η τιμή που εμφανίζεται περισσότερες φορές στο δείγμα.
δ) το άθροισμα όλων των διαφορετικών τιμών της μεταβλητής.
ε) τίποτε από τα παραπάνω.

12. Αν δεν υπάρχει επικρατούσα τιμή, η κατανομή λέγεται:
α) Ομοιόμορφη. β) Συμμετρική. γ) Ασύμμετρη.
δ) Κανονική ε) Τίποτε από τα προηγούμενα.

13. Στο διπλανό δείγμα: 3 12 4 3 17 12 16 19, η επικρατούσα τιμή είναι:
α) 19 β) 3 γ) 12 δ) 12 και 3 ε) 16 και 1

14. Το δείγμα: 3 7 4 2 3 4 2 7 x, έχει δύο επικρατούσες τιμές για:
α) $x = 7$ β) $x = 2$
γ) $x \geq 7$
δ) καμία τιμή του x ε) κανένα από τα παραπάνω

15. Αν το δείγμα: 3 7 2 3 4 7 x, έχει δύο επικρατούσες τιμές, τότε πρέπει:
α) $x \neq 7$ β) $x \neq 7, x \neq 3, x \neq 2, x \neq 4$ γ) $x \neq 3$ δ) $x \neq 3, x \neq 7$
ε) κανένα από τα παραπάνω

16. **Από τα παρακάτω, μέτρο θέσης είναι:**
α) το εύρος β) το ενδοτεταρτημοριακό εύρος γ) η διάμεσος
δ) η διακύμανση ε) η τυπική απόκλιση

17. **Αν η καμπύλη συχνοτήτων για το χαρακτηριστικό που εξετάζουμε είναι κανονική, τότε το εύρος ισούται περίπου με:**
α) 2 τυπικές αποκλίσεις β) 3 τυπικές αποκλίσεις γ) 4 τυπικές αποκλίσεις
δ) 5 τυπικές αποκλίσεις ε) 6 τυπικές αποκλίσεις

18. **Σε μια κανονική κατανομή, το σύνολο σχεδόν των παρατηρήσεων περιέχονται στο διάστημα:**
α) $(\bar{x} - s, \bar{x})$ β) $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$ γ) $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$
δ) $(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s)$ ε) Κανένα από τα προηγούμενα.

19. **Άν η καμπύλη συχνοτήτων για το χαρακτηριστικό που εξετάζουμε είναι κανονική, τότε το 68% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα:**
α) $(\bar{x} + s, \bar{x} + 2s)$ β) $(\bar{x} - s, \bar{x} + 2s)$ γ) $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$
δ) $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$ ε) $(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s)$

20. **Άν η καμπύλη συχνοτήτων για το χαρακτηριστικό που εξετάζουμε είναι κανονική, τότε το 95% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα:**
α) $(- s, + s)$ β) $(- 2s, + s)$ γ) $(- 2s, + 2s)$ δ) $(- s, + 3s)$ ε) $(- 3s, + 3s)$

21. **Σε μια κανονική κατανομή το ποσοστό των παρατηρήσεων που περιέχονται στο διάστημα $(\bar{x} + s, \bar{x} + 2s)$ είναι περίπου:**
α) 34% β) 13,5% γ) 68% δ) 50% ε) 99,7%

22. **Η μέση τιμή μιας κανονικής κατανομής είναι 25 και η τυπική απόκλιση είναι 5. Το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μεταξύ 20 και 30 είναι περίπου:**
α) 34% β) 65% γ) 68% δ) 95% ε) 99,7%

23. **Η μέση τιμή μιας κανονικής κατανομής είναι 20 και η τυπική απόκλιση είναι 3. Το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μεταξύ 14 και 26 είναι περίπου:**
α) 34% β) 47,5% γ) 68% δ) 95% ε) 99,7%

24. **Η μέση τιμής μιας κανονικής κατανομής είναι 30 και η τυπική απόκλιση είναι 3. Το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μεταξύ 30 και 33 είναι περίπου:**
α) 34% β) 47,5% γ) 68% δ) 95% ε) 99,7%

25. **Ένα εργοστάσιο κατασκευάζει μεταλλικούς δίσκους για τη λειτουργία μιας μηχανής. Η κατανομή συχνοτήτων ως προς τη διάμετρό τους είναι κανονική με μέση τιμή (διάμετρο) 32 cm και τυπική απόκλιση 0,2 cm. Αν αγοράσουμε ένα τέτοιο δίσκο η διάμετρός του είναι σχεδόν βέβαιο ότι θα βρίσκεται στο διάστημα μεταξύ:**

α) 33,5 cm και 35,2 cm β) 31,4 cm και 32,6 cm γ) 29,2 cm και 31,4 cm δ) 32,6 cm και 35,5 cm ε) 20,7 cm και 22,3 cm

26. **Αν διαλέξουμε ένα τέτοιο δίσκο στην τύχη, πρέπει να ελέγξουμε τη λειτουργία της μηχανής για πιθανή βλάβη, όταν η διάμετρός του είναι:**

α) 31,5 cm β) 31,7 cm γ) 31,2cm δ) 31,9 cm ε) 32,5 cm

27. **Το παρακάτω δείγμα: 1 3 7 6 8 11 14 20, έχει ενδοτεταρτημοριακό εύρος ίσο με:**

α) 8 β) 7 γ) 6 δ) 7,5 ε) 6,5

28. **Μία κατανομή έχει διακύμανση 4 και μέση τιμή 5. Τότε ο συντελεστής μεταβλητότητας θα είναι ίσος με:**

α) 80% β) 120% γ) 8% δ) 40% ε) 50%

29. **Οταν όλες οι τιμές της μεταβλητής σε μια κατανομή είναι ίσες με τη μέση τιμή τότε:**

α) Το εύρος ισούται με τη μέση τιμή.
β) Η μέση τιμή ισούται με τη διάμεσο.
γ) Η τυπική απόκλιση ισούται με μηδέν.
δ) Τα (β) και (γ) μαζί.
ε) Τίποτε από τα παραπάνω.

30. **Ο συντελεστής μεταβλητότητας CV εκφράζεται από το λόγο:**

α) $\frac{s^2}{\bar{x}}100\%$ β) $\frac{s}{\bar{x}}100\%$ γ) $\frac{\bar{x}}{s}100\%$ δ) $\frac{\bar{x}}{s^2}100\%$ ε) $\frac{\bar{x}^2}{s}100\%$

Ασκήσεις Αντιστοίχισης.

1. Αντιστοιχίστε τα στοιχεία των διπλανών στηλών.

Στήλη Α΄ (Μέτρο)	Στήλη Β΄ (Σύμβολο)
α) εύρος	1) s^2
β) ενδοτεταρτημοριακό εύρος	2) Q
γ) διακύμανση	3) R
δ) τυπική απόκλιση	4) s
ε) συντελεστής μεταβολής	5) f
	6) CV
	7) $\bar{x}$

2. Αντιστοιχίστε τα στοιχεία των παρακάτω στηλών.

Στήλη Α΄ (Μέτρο)	Στήλη Β΄ (Παράσταση)
α) μέση τιμή ($\bar{x}$)	1) $Q_3 - Q_1$
β) ενδοτεταρτημοριακό εύρος Q	2) $\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} t_i$
γ) διακύμανση (s^2)	3) $\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(t_i - \bar{x})^2$
δ) τυπική απόκλιση (s)	4) $\sqrt{s^2}$
ε) συντελεστής μεταβολής (CV)	5) $\frac{s}{\bar{x}}100\%$
	6) $\frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{\nu} w_i}$

3. Αντιστοιχίστε τα ποσοστά της στήλης Α΄ με τα διαστήματα της στήλης Β΄ για μία κανονική κατανομή.

Στήλη Α΄	Στήλη Β΄
α) 68%	1) $(\bar{x} - s,\ \bar{x} + s)$
	2) $(2\bar{x} - s,\ 2\bar{x} + s)$
β) 95%	3) $(\bar{x} - 2s,\ \bar{x} + 2s)$
	4) $(\bar{x} - 3s,\ \bar{x} + 3s)$
γ) 99,7%	5) $(3\bar{x} - s,\ 3\bar{x} + s)$

Ασκήσεις.

1. Τα 16 τμήματα ενός Λυκείου έχουν τους εξής μαθητές:
31, 27, 28, 30, 29, 31, 21, 27, 29, 29, 28, 28, 30, 29, 27, 29.
Να υπολογίσετε το μέσο αριθμό μαθητών ανά τμήμα.

2. Οι ηλικίες 15 υπαλλήλων σε μια επιχείρηση δίνονται στον παρακάτω πίνακα:
24 26 34 42 47 36 28 40 28 35 30 33 44 32 28
α) Να βρεθεί η μέση ηλικία των εργαζομένων.
β) Ποια θα είναι η μέση ηλικία μετά από 5 χρόνια;
γ) Να βρεθεί η διάμεσος και η επικρατούσα ηλικία.

3. Τα χρόνια υπηρεσίας των υπαλλήλων σε μια Δημόσια Υπηρεσία δίνονται ομαδοποιημένα στον παρακάτω πίνακα:

Χρόνια Υπηρεσίας	[0, 5)	[5,10)	[10,15)	[15,20)	[20,25)	[25,30)
Υπάλληλοι	3	5	14	11	8	4

α) Να κατασκευαστεί το ιστόγραμμα συχνοτήτων και αθροιστικών συχνοτήτων.
β) Αν ισχύει πρόωρη συνταξιοδότηση στα 25 χρόνια υπηρεσίας πόσοι υπάλληλοι μπορούν να συνταξιοδοτηθούν στα επόμενα 5 χρόνια;
γ) Να βρεθεί ο μέσος χρόνος υπηρεσίας των υπαλλήλων.
δ) Αν μετατεθούν 6 υπάλληλοι από τους πιο νέους να βρεθεί ο νέος μέσος χρόνος υπηρεσίας των υπαλλήλων.

4. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή της μεταβλητής του δίπλα πίνακα:

Ηλικία σε χρόνια	ν_i
[0, 4)	3
[4, 8)	5
[8, 12)	6
[12, 16)	6
[16, 20)	2
Σύνολο:	22

5. Η μέση τιμή επτά αριθμών είναι 5. Οι πέντε από αυτούς τους αριθμούς είναι οι 3, 4, 5, 6, 11.
Να βρείτε τους άλλους δύο αριθμούς αν γνωρίζουμε ότι ο ένας είναι διπλάσιος του άλλου.

6. Η μέση τιμή επτά αριθμών είναι 5. Οι πέντε από αυτούς τους αριθμούς είναι οι 1, 4, 5, 8, 13. Να βρείτε τους άλλους δύο αριθμούς αν γνωρίζουμε ότι η διάμεσος δ είναι 9 και η μέση τιμή είναι 6.

7. Τα ύψη 8 αθλητών μιας ομάδας μπάσκετ είναι (σε cm): 172, 175, 183, 177, 190, 193, 189, 195.
α) Να βρείτε:
ι) Το μέσο ύψος των αθλητών ιι) Τη διάμεσο των υψών ιιι) Το εύρος (R) των υψών

β) Επίσης, σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις, να βρείτε:
ι) Το μέσο ύψος των αθλητών ιι) Τη διάμεσο των υψών ιιι) Το εύρος (R) των υψών
Περίπτωση 1: Φεύγει ο αθλητής με το ύψος 172 cm.
Περίπτωση 2: Έρχεται ακόμα ένας αθλητής με ύψος 197 cm.
Περίπτωση 3: Φεύγει ο αθλητής με το ύψος 195cm και έρχεται ένας αθλητής με ύψος 198cm.

8. Μια επιχείρηση απασχολεί 50 εργαζόμενους με μέσο μισθό 530 €. Οι 5 από αυτούς είναι προϊστάμενοι και ο μέσος μισθός τους είναι 820 €. Να βρείτε το μέσο μισθό των υπολοίπων εργαζομένων.

9. Το μέσο βάρος 4 ατόμων σε ένα ασανσέρ είναι 76 κιλά. Σε κάποιο όροφο μπαίνει κάποιος που ζυγίζει 95 κιλά. Πόσο είναι το μέσο βάρος τους τώρα; Αν το μέσο βάρος που μπορεί να αντέξει το ασανσέρ είναι 82 κιλά, για να μπει άλλος ένας μέχρι πόσο πρέπει να ζυγίζει;

10. Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει τις διάρκειες (σε sec) 40 τηλεφωνικών συνδιαλέξεων ενός συνδρομητή κινητής τηλεφωνίας.

251	260	365	230	280	273	273	269	210	272
332	274	255	286	275	268	291	280	219	282
320	312	300	157	275	277	366	254	274	237
332	346	302	317	327	337	348	354	301	317

α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή.
β) Να υπολογίστε τη μέση τιμή με ομαδοποίηση σε 7 κλάσεις.
γ) Να υπολογίστε τη μέση τιμή με ομαδοποίηση σε 10 κλάσεις.
δ) Τί παρατηρείτε;

11. Εστω τρία δείγματα με μεγέθη: ν_1, ν_2, ν_3 και αντίστοιχες μέσες τιμές x_1, x_2, x_3. Δείξτε ότι η μέση τιμή του δείγματος με μέγεθος: $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3$ είναι:

$$\overline{x} = \frac{\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \nu_3 x_3}{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3}$$

12. Σε 30 γραπτά μαθητών της Β΄Λυκείου η μέση τιμή είναι 16. Σε αναβαθμολόγηση που έγινε αφαιρέθηκαν 2 μονάδες σε 15 γραπτά και προστέθηκαν 3 μονάδες σε 10 γραπτά. Να βρεθεί η νέα μέση τιμή.

13. Μια επιχείρηση απασχολεί 6 υπαλλήλους. Οι μισθοί τους (σε δεκάδες ευρώ) μηνιαίως είναι: 120, 140, 155, 140, 135 και 280. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο. Που οφείλεται η διαφορά τους;

14. Η βαθμολογία ενός μαθητή στα τέσσερα τεστ ενός μαθήματος ήταν (σε εκατοντάβαθμια κλίμακα): 38, 67, 43, 72. Η βαρύτητα σε καθένα ήταν αντίστοιχα: 1, 2, 2 και 3. Να βρείτε τη μέση επίδοση του μαθητή στα τεστ.

15. Η επίδοση ενός μαθητή σε έξι μαθήματα είναι: 17, 18, 12, 14, 15 και 11. Να βρείτε τη μέση επίδοση. Αν τα δύο πρώτα μαθήματα είχαν συντελεστή στάθμισης 2 και τα υπόλοιπα 1, ποια θα ήταν η μέση επίδοση; Ενας άλλος μαθητής είχε επιδόσεις στα ίδια μαθήματα: 9, 10, 14, 18, 14 και 16. Να συγκρίνετε τη μέση επίδοση του δεύτερου μαθητή με του πρώτου και στις δύο περιπτώσεις.

16. Σε μια έρευνα μεταξύ 500 ανέργων για το χρόνο σε μήνες που είναι άνεργοι προέκυψε ο παρακάτω πίνακας:

Χρόνος ανεργίας	ν_i	f_i %	N_i
[0, 3)		19	
[3, 6)		38,6	
[6, 12)		24,4	
[12, 24)		13,6	
[24, 36)		4,4	
		100	

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα.
β) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων.
γ) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή.

17. Για τον παρακάτω πίνακα να υπολογίσετε:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_i	0,04	0,16	0,2	0,1	0,11	0,19	0,05	0,03	0,06	0,06

ι) Τη μέση τιμή ιι) Τη διάμεσο ιιι) Την επικρατούσα τιμή

σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: Για μέγεθος δείγματος $\nu = 200$.

Περίπτωση 2: Για μέγεθος δείγματος $\nu = 100$.

Περίπτωση 3: Για άγνωστο μέγεθος δείγματος.

18.

Διάρκεια	Συχνότητα v_i
200 - 250	8
250 - 300	11
300 - 350	17
350 - 400	38
400 - 450	20
450 - 500	6
Σύνολο:	100

Στον διπλανό πίνακα αναφέρονται ομαδοποιημένα οι διάρκειες συνεχούς λειτουργίας σε ώρες 100 ηλεκτρικών συσκευών του ίδιου τύπου.

α) Να κατασκευαστεί ο πίνακας σχετικών συχνοτήτων και αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.

β) Πόσες συσκευές έχουν μέχρι 400 ώρες ζωή και σε τι ποσοστό;

γ) Να κατασκευαστεί το πολύγωνο σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων και να βρεθούν η διάμεσος και τα τεταρτημόρια.

19. Οι παρακάτω αριθμοί δίνουν (σε cm) τα αναστήματα ενός δείγματος 40 μαθητών ενός σχολείου.

159	168	162	183	180	179	153	168	170	170
172	175	175	181	165	166	171	185	169	180
180	182	160	157	175	167	162	174	174	187
192	166	172	167	187	177	178	174	171	177

α) Να υπολογίσετε τη διάμεσο.

β) Να ομαδοποιήσετε τα αναστήματα σε κλάσεις πλάτους 5 cm και να προσδιορίσετε γραφικά τη διάμεσο από το διάγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων.

γ) Να συγκρίνετε τα δύο αποτελέσματα.

20.

Χρόνος επίλυσης x_i	Αριθμός μαθητών v_i	N_i
[10, 13)	8	
[13, 16)	16	
[16, 19)	28	
[19, 22)	30	
[22, 25)	12	
[25, 28)	4	
[28, 31)	2	
Σύνολα:	100	

Ο χρόνος επίλυσης μιας άσκησης Γεωμετρίας (σε min) 100 μαθητών της Β΄Λυκείου δίνεται από τον επόμενο πίνακα:

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα κατανομής αθροιστικών συχνοτήτων.

β) Να κάνετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων.

γ) Να βρείτε:

ι) Τη διάμεσο.

ιι) Το πρώτο και τρίτο τεταρτημόριο.

ιιι) Τα P_{10}, P_{30} και P_{60}

ιv) Την επικρατούσα τιμή.

δ) Πόσοι μαθητές έλυσαν την άσκηση γρηγορότερα από 20 min;

21. Στα ομαδοποιημένα δεδομένα αποδείξτε γεωμετρικά ότι ισχύουν οι ακόλουθοι τύποι:

α) $Q_1 = L_i + \dfrac{\frac{v}{4} - N_{i-1}}{v_i}c$ β) $Q_2 = L_i + \dfrac{\frac{v}{2} - N_{i-1}}{v_i}c$ γ) $Q_3 = L_i + \dfrac{\frac{3v}{4} - N_{i-1}}{v_i}c$

όπου Li: το αριστερό ακρο της κλάσης που περιέχει τα Q_1, Q_3

N_{i-1}: η αθροιστική συχνότητα της προηγούμενης κλάσης

c: το πλάτος των κλάσεων

v_i: η συχνότητα της κλάσης

v: το μέγεθος του δείγματος

22. Ο διπλανός πίνακας μας δίνει τα εκατοστά της βροχής ετησίως σε 25 πόλεις.

α) Να κατασκευάσετε τον πίνακα συχνοτήτων, αθροιστικών συχνοτήτων και σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων.

β) Να βρεθούν γραφικά η διάμεσος και η επικρατούσα τιμή.

Υψος (cm)	Σχετική συχνότητα f_i %
60 - 70	4
70 - 80	16
80 - 90	20
90 - 100	28
100 - 110	24
110 - 120	8
Σύνολο:	100

23. Για τον παρακάτω πίνακα να υπολογίσετε:

9	1	2	3	8	1	5	6	7	7
2	4	7	9	1	1	1	6	5	9
2	7	5	8	5	6	7	8	6	8

ι) Τη μέση τιμή ιι) Τη διάμεσο ιιι) Τα τεταρτημόρια

ιν) Την ενδοτεταρτημοριακή απόκλιση

24. Για τον παρακάτω πίνακα αφού ομαδοποιήσετε τα δεδομένα σε 7 ισοπλατείς κλάσεις να υπολογίσετε:

ι) Την μέση τιμή ιι) Τη διάμεσο

ιιι) Τα τεταρτημόρια ιν) Την ενδοτεταρτημοριακή απόκλιση

15	16	12	18	10	17	13	18	17	7
12	17	5	11	5	16	11	5	9	18
11	14	8	16	13	11	11	8	9	12
10	11	16	5	7	6	16	14	14	7
12	16	12	16	17	7	8	14	11	17

25. Εξετάστηκε ένα δείγμα 500 ατόμων ως προς τον αριθμό των επισκέψεών τους στον οδοντογιατρό κατά τη διάρκεια ενός έτους και προέκυψε ο παρακάτω πίνακας:

Αρ. επισκέψεων (x_i)	Αρ. ατόμων (ν_i)	f_i	$f_i\%$	N_i	$\nu_i x_i$
1	141				
2	234				
3	38				
4	35				
5	27				
6	25				
Σύνολα:	500				

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

β) Να υπολογίσετε:

ι) Τη μέση τιμή. ιι) Τη διάμεσο της κατανομής.

ιιι) Τα P_{10}, P_{40}, P_{80} ιν) Τα τεταρτημόρια.

26. Σ' ένα τεστ πήραν μέρος 100 μαθητές προκειμένου ο καθένας να απαντήσει σε 200 ερωτήσεις. Η βαθμολογία είναι 1 ή 0, ανάλογα αν ο μαθητής απαντάει ή όχι στην ερώτηση. Ο διπλανός πίνακας δείχνει τα αποτελέσματα της βαθμολογίας.

Βαθμοί	Συχνότητα
[60, 80)	5
[80, 100)	20
[100, 120)	26
[120, 140)	30
[140, 160)	15
[160, 180)	4
Σύνολο:	100

α) Να κάνετε:

ι) Το ιστόγραμμα συχνοτήτων.

ιι) Το πολύγωνο των συχνοτήτων.

β) Να βρείτε την επικρατούσα τιμή.

27. Εστω τα παρακάτω δείγματα:

Δείγμα 1: 3 5 1 7 4 4 2 3 1 4 3 152

Δείγμα 2: 3 4 1 1 3 4 7 3 3 4 3 2

Δείγμα 3: Α Β Α Α Γ Β Α Δ Γ Α Β Δ

Ποιό μέτρο θέσης θα επιλέγατε σε κάθε περίπτωση και γιατί;

28. Για τον διπλανό πίνακα να υπολογίσετε:

ι) Την μέση τιμή ιι) Το εύρος

ιιι) Την διακύμανση ιν) Την τυπική απόκλιση

x_i	1	2	3	4	5
ν_i	3	6	5	2	1

29. Στον παρακάτω πίνακα αναγράφονται τα ημερομίσθια 20 εργατών σε €

18	20	21	19	17	18	23	25	27	19
20	20	20	19	18	19	25	23	22	19

α) Να υπολογίσετε το μέσο ημερομίσθιο.
β) Αν σε κάποιους εργάτες γίνει διορθωτική αύξηση ώστε ο μισθός τους να εξισωθεί με το μέσο ημερομίσθιο, να υπολογίσετε το νέο μέσο ημερομίσθιο.
γ) Να βρείτε τη διάμεσο και την επικρατούσα τιμή και στις δύο περιπτώσεις.

30. Ο διπλανός πίνακας μας δίνει την κατανομή των μηνιαίων αποδοχών 50 υπαλλήλων μιας επιχείρησης σε ευρώ.
α) Αν ο μέσος μηνιαίος μισθός είναι 735€ να υπολογίσετε τις συχνότητες που λείπουν.
β) Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση.
γ) Να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβολής.

Αποδοχές	Συχνότητα ν_i
600 - 650	13
650 - 700	
700 - 750	
750 - 800	10
800 - 850	8
850 - 900	6
Σύνολο:	50

31. Να βρεθεί η τυπική απόκλιση για τον παρακάτω πίνακα:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
ν_i	2	4	3	5	2	1	5	7

32. Η μέση διάρκεια τηλεφωνικής συνδιάλεξης 10 συνδρομητών κινητής τηλεφωνίας (σε min) είναι: 15, 12, 13, 13, 7, 16, 14, 10, 15, 17. Να υπολογίσετε και να ερμηνεύσετε:
ι) Τη μέση διάρκεια
ιι) Την ενδοτεταρτημοριακή απόκλιση
ιιι) Την τυπική απόκλιση.

33. Η βαθμολογία στα 10 μαθήματα ενός μαθητή είναι: 12, 11, 09, 14, 10, 18, 18, 18, 11, 20.
Να υπολογίσετε:
α) Τη μέση τιμή.
β) Τη διακύμανση.
γ) Την τυπική απόκλιση.
δ) Τη διάμεσο.
ε) Τα τεταρτημόρια Q_1, Q_2, Q_3.
στ) Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος των βαθμών.
ζ) Το εύρος (R).
η) Το συντελεστή μεταβολής (CV).

34. Εστω το διατεταγμένο δείγμα ακεραίων τιμών: 1, 3, 7, 7, x, y, z, 13, 13, 15.
Αν η μέση τιμή είναι 9 και η επικρατούσα τιμή είναι 13 να βρεθούν:
α) η διάμεσος
β) η διακύμανση
γ) η τυπική απόκλιση
δ) ο συντελεστής μεταβολής

35. Έστω το διατεταγμένο δείγμα: 1, 4, 8, 8, x, 10, 10, 10, 11. Αν η επικρατούσα τιμή ισούται με τη διάμεσο, να βρεθούν:
α) η διακύμανση β) η τυπική απόκλιση γ) ο συντελεστής μεταβολής

36. Δείξτε ότι για κάθε θετική ακέραια τιμή των x, y, $x \neq y$, το δείγμα: 1, 1, 2, 2, 2, x, y, έχει διάμεσο το 2.

37. Η τυπική απόκλιση μιας μεταβλητής X είναι ίση με το μηδέν. Αν: $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ είναι οι τιμές της X και $\bar{x}$ η μέση τιμή, δείξτε ότι: $t_1 = t_2 = \ldots = t_\nu = \bar{x}$.

38. Έστω ότι η μεταβλητή X παίρνει τις τιμές 0 και 1 και έχει: $\bar{x} = \lambda$. Δείξτε ότι: $s^2 = \lambda(1 - \lambda)$.

39. Έξι διαδοχικοί ακέραιοι έχουν μέση τιμή 5,5. Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση.

40. Έστω οι παρατηρήσεις: 1, 4, 7, 10… Να βρεθεί η μέση τιμή και η διάμεσός τους αν το μέγεθος του δείγματος είναι 300.

41. Άν $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ είναι οι τιμές της ποσοτικής μεταβλητής X δείξτε ότι το ελάχιστο της παράστασης: $\sum_{i=1}^{\nu}(t_i - k)^2$, $k \in R$, ισούται με: $\nu \cdot s^2$.

42. Σε μια κατανομή οι δυνατές τιμές της μεταβλητής είναι 5 διαδοχικοί ακέραιοι με συχνότητα 1. Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση.

43. Άν $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ είναι οι τιμές της ποσοτικής μεταβλητής X αποδείξτε ότι η μέση τιμή $\bar{x}$ δεν μπορεί να συμπίπτει αριθμητικά με την διακύμανση s^2.

44. Μια κανονική κατανομή έχει μέση τιμή 30 και τυπική απόκλιση 5. Να βρεθεί το ποσοστό των παρατηρήσεων που περιέχονται στα διαστήματα:
α) (25,35) β) (30,35) γ) (20,40) δ) (20,30) ε) (15,45)

45. Σε μια κανονική κατανομή το 49,85% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκονται στο διάστημα (10,16). Να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής. Είναι το δείγμα ομοιογενές;

46. Έστω οι παρατηρήσεις: x_i, $i = 1 \ldots \nu$, με μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση s. Να δείξετε ότι:

α) Οι παρατηρήσεις $x_i + \alpha$, $i = 1 \ldots \nu$ έχουν μέση τιμή $\bar{x} + \alpha$ και τυπική απόκλιση s.

β) Οι παρατηρήσεις αx_i, $i = 1 \ldots \nu$ έχουν μέση τιμή $\alpha \cdot \bar{x}$ και τυπική απόκλιση s.

47. Εξετάζουμε ένα δείγμα μαθητών ενός σχολείου ως προς τη βαθμολογία τους σ' ένα διαγώνισμα. Έστω η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση. Ποια θα είναι η νέα μέση τιμή και ποια η διακύμανση όταν η βαθμολογία κάθε μαθητή αυξηθεί:

α) κατά 2 μονάδες

β) κατά C μονάδες;

γ) Τι συμπεραίνετε από τις παραπάνω περιπτώσεις για τη μέση τιμή και τη διακύμανση;

48. Με τη βοήθεια του τύπου: $s^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(x_i - \bar{x})^2$ απόδείξτε ότι: $s^2 = \frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{\nu}x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu}x_i\right)^2}{\nu}\right\}$

49. Σε ένα δείγμα μιας ποσοτικής μεταβλητής έχουμε: $\sum_{i=1}^{\nu}t_i^2 = 100$, $\sum_{i=1}^{\nu}t_i = 4\sqrt{30}$ και $s = \sqrt{5}$. Να βρεθεί το μέγεθος του δείγματος αν $\nu > 10$.

50. Η μέση τιμή των παρατηρήσεων: $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ μιας μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους ν είναι $\bar{x}$. Να βρείτε την μέση τιμή των παρατηρήσεων:

α) $t_1 + \lambda, t_2 + \lambda, \ldots, t_\nu + \lambda$

β) $t_1 - \lambda, t_2 - \lambda, \ldots, t_\nu - \lambda$

γ) $\lambda t_1, \lambda t_2, \ldots, \lambda t_\nu$

δ) , , …, $(\lambda \neq 0)$

ε) $\lambda t_1 + \kappa, \lambda t_2 + \kappa, \ldots, \lambda t_\nu + \kappa$

51. Οι τιμές πώλησης δέκα ηλεκτρικών συσκευών (σε ευρώ) είναι: 265, 280, 280, 310, 400, 310, 280, 350, 280 και 265.

ι) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο και να βρείτε την επικρατούσα τιμή.

ιι) Εάν τα είδη πουληθούν με 10% έκπτωση, ποια από τα παραπάνω μεγέθη θα αλλάξουν και πως;

ιιι) Εάν οι πελάτες επιβαρυνθούν με 10€ επιπλέον στη τιμή αγοράς για έξοδα μεταφοράς, ποια από τα παραπάνω μεγέθη θα αλλάξουν και πώς;

52. Εστω ποσοτικές μεταβλητές X,Y με μέσες τιμές $\bar{x}, \bar{y}$ και τυπικές αποκλίσεις s_x, s_y αντίστοιχα. Αν ισχύει: $x_i = \frac{s_x}{\alpha}y_i + \bar{x}$, $\alpha \in N^*$, να βρεθεί η τυπική απόκλιση s_y.

53. Εστω οι ποσοτικές μεταβλητές X,Y με μέσες τιμές $\bar{x}, \bar{y}$ και τυπικές αποκλίσεις S_x, S_y. Συνδιακύμανση των μεταβλητών X,Y είναι η ποσότητα:

$$s_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu}(x_i - \bar{x})(\bar{y}_i - \bar{y})}{\nu}$$

. Δείξτε ότι: $s_{xy} = \hat{\beta} s_x^2$

54. Εστω ποσοτική μεταβλητή Χ με μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση s_x. Να βρεθεί η τυπική απόκλιση της μεταβλητής Υ με: $y_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s_x}$

55. Εστω οι ποσοτικές μεταβλητές Υ με μέση τιμή $\bar{y} = 8$ και $y_i = (x_i - 1)^2$ $i = 1....\nu$ και W με μέση τιμή: $\bar{w} = 12$ και $w_i = (x_i - 4)^2$ $i = 1....\nu$. Να βρεθούν η μέση τιμή $\bar{x}$ και η διακύμανση s της ποσοτικής μεταβλητής Χ με το ίδιο μέγεθος δείγματος ν.

56. Στον παρακάτω πίνακα δίδεται ο αριθμός ελαττωματικών λαμπτήρων που βρέθηκαν σε 70 πακέτα.

Αριθμός Ελατ. Λαμπτήρων:	1	2	3	4	5	6
Πακέτα:	14	22	11	8	6	9

α) Να υπολογίσετε:
(ι) το εύρος, (ιι) την επικρατούσα τιμή, (ιιι) τα τεταρτημόρια,
(ιν) τη διάμεσο (ν) την τυπική απόκλιση του δείγματος.

β) Να κατασκευάσετε το πολύγωνο συχνοτήτων και το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.

γ) Αν κάθε πακέτο είχε δυο επιπλέον ελαττωματικούς λαμπτήρες πως θα επηρεαζόταν η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση;

57. α) Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

Τιμές μεταβλ. x_i	Συχνότητα ν_i	Σχετική Συχν. f_i	Σχετική Συχν. f_i%	Αθρ. Συχν. N_i	$x_i \nu_i$	x_i^2	$x_i^2 \nu_i$
1	10				10	1	10
2				35		4	
3						9	
Σύνολα:	ν = 50	1	100				

β) Να υπολογιστεί η μέση τιμή και η διάμεσος.

γ) Δείξτε ότι η διακύμανση είναι $s^2 = 0{,}49$ (Πανελλήνιες Εξετάσεις 2000)

58. Δίνεται ο πίνακας:

Κλάσεις	(x_i)	ν_i	$x_i \nu_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \nu_i$
[5, 10)		5				
[10, 15)		6				
[15, 20)		8				
[20, 25)		10				
[25, 30)		14				
[30, 35)		7				
	Σύνολο:	50				

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

β) Να υπολογίσετε:

ι) Τη μέση τιμή.

ιι) Τη διακύμανση.

ιι) Την τυπική απόκλιση της κατανομής

ιν) Το συντελεστή μεταβολής.

γ) Να κάνετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων.

δ) Να βρείτε την επικρατούσα τιμή.

59. Σε έρευνα που έγινε στους μαθητές μιας πόλης για το χρόνο που κάνουν να πάνε από το σπίτι στο σχολείο διαπιστώθηκε ότι το 50% περίπου των μαθητών χρειάζονται περισσότερο από 12 λεπτά, ενώ το 16% περίπου χρειάζεται λιγότερο από 10 λεπτά.

Υποθέτουμε ότι η κατανομή του χρόνου διαδρομής είναι κατά προσέγγιση κανονική.

α) Να βρείτε το μέσο χρόνο διαδρομής των μαθητών και την τυπική απόκλιση του χρόνου διαδρομής τους.

β) Εξετάστε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

γ) Αν οι μαθητές είναι 4000 πόσοι θα κάνουν χρόνο διαδρομής από 14 έως 16 λεπτά.

δ) Μια μέρα λόγω έργων στον κεντρικό δρόμο της πόλης κάθε μαθητής καθυστέρησε 5 λεπτά. Να βρείτε πόσο μεταβάλλεται ο συντελεστής μεταβολής (CV).

(Πανελλήνιες Εξετάσεις 2001)

60. Οι μηνιαίες αποδοχές σε € ενός δείγματος 50 υπαλλήλων ενός οργανισμού δίνονται στον επόμενο πίνακα:

Αποδοχές	x_i	ν_i	$x_i \nu_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \nu_i$
[600, 650)		5				
[650, 700)		6				
[700, 750)		12				
[750, 800)		11				
[800, 850)		9				
[850, 900)		4				
[900, 950)		3				
Σύνολα:		50				

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

β) Να υπολογίσετε:

ι) Τη μέση τιμή.

ιι) Τη διακύμανση.

ιιι) Την τυπική απόκλιση της κατανομής.

ιν) Το συντελεστή μεταβολής.

2.4 Γραμμική Παλινδρόμηση.

Απαραίτητες γνώσεις Θεωρίας

Θεωρία 1.

α) Τι ονομάζουμε ανάλυση παλινδρόμησης;
β) Τι είναι η απλή γραμμική παλινδρόμηση;

Απάντηση:

α) Ανάλυση παλινδρόμησης είναι ο κλάδος της Στατιστικής που εξετάζει την σχέση μεταξύ δυο ή περισσοτέρων μεταβλητών με σκοπό την πρόβλεψη μιας εξ΄αυτών μέσω των άλλων.

β) Η απλή γραμμική παλινδρόμηση είναι η απλούστερη περίπτωση παλινδρόμησης. Στην απλή γραμμική παλινδρόμηση έχουμε δυο μεταβλητές: την ανεξάρτητη μεταβλητή X και την εξαρτημένη μεταβλητή Y και προσπαθούμε να προσεγγίσουμε την σχέση των δύο μεταβλητών μέσα από μια γραμμική συνάρτηση. Ο σκοπός μας είναι να μπορούμε να προβλέπουμε τις τιμές της Y δεδομένων των τιμών της X με τη βοήθεια μιας ευθείας που ονομάζεται **ευθεία παλινδρόμησης**.
Δηλαδή εξετάζουμε την παλινδρόμηση της εξαρτημένης μεταβλητής Y πάνω στην ανεξάρτητη μεταβλητή X.

Προσοχή! Η τελευταία έκφραση μας βοηθά να καταλάβουμε από τη διατύπωση του προβλήματος ποια πρέπει να θεωρήσουμε ως ανεξάρτητη και ποια ως εξαρτημένη μεταβλητή.

Θεωρία 2.

Τι είναι το διάγραμμα διασποράς και πως κατασκευάζεται;

Απάντηση:

Το διάγραμμα διασποράς είναι ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων που περιέχει τα σημεία με συντεταγμένες τα ζεύγη των τιμών (x_i, y_i) των μεταβλητών X,Y.

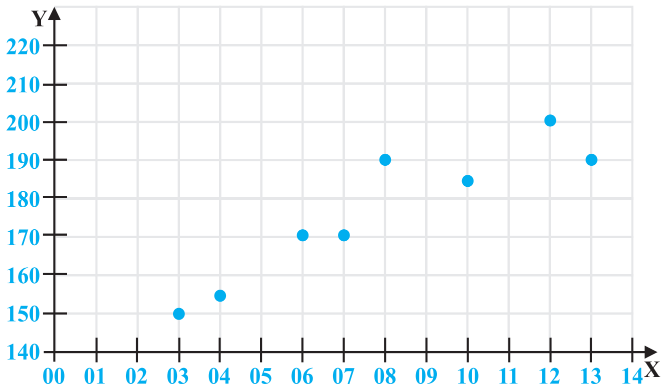
Για την κατασκευή του δημιουργούμε ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων και σημειώνουμε όλα τα σημεία με συντεταγμένες (x_i,y_i). Η αρίθμηση των αξόνων είναι ανεξάρτητη της αρχής των αξόνων.

Παράδειγμα 26:
Εστω τα ζεύγη των αντίστοιχων τιμών των μεταβλητών X, Y.

X	3	4	6	7	8	10	12	13
Y	150	155	170	170	190	185	200	190

Ποιό είναι το διάγραμμα διασποράς;

Απάντηση:
Το διάγραμμα διασποράς είναι:



Θεωρία 3.

Πως βρίσκουμε την ευθεία παλινδρόμησης;

Απάντηση:
Έστω y = α + βx η ευθεία παλινδρόμησης. Ο προσδιορισμός της γίνεται με δύο τρόπους.

Α) Εποπτικά: Από το διάγραμμα διασποράς επιλέγουμε δυο σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ έτσι ώστε τα υπόλοιπα σημεία να είναι όσο το δυνατόν πιο κοντά στην ευθεία ΑΒ. **Η επιλογή αυτών των δυο σημείων είναι υποκειμενική.** Κατόπιν υπολογίζουμε τις τιμές των α,β της ευθείας λύνοντας το σύστημα: $\begin{cases} y_1 = \alpha + \beta x_1 \\ y_2 = \alpha + \beta x_2 \end{cases}$ **(Σ)**

Παράδειγμα 27:
Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας $y = \alpha + \beta x$ που διέρχεται από τα σημεία $A(7,170)$ και $B(4,155)$ στο διάγραμμα διασποράς του παραδείγματος 26.

Τότε: $\begin{cases} 170 = \alpha + 7\beta \\ 155 = \alpha + 4\beta \end{cases}$

Αφαιρώντας κατά μέλη έχουμε:

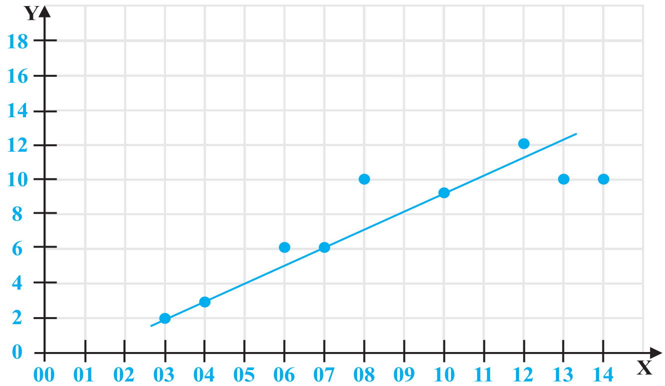
$170 - 155 = \alpha + 7\beta - \alpha - 4\beta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 15 = 3\beta \Leftrightarrow 5 = \beta$

Αρα:

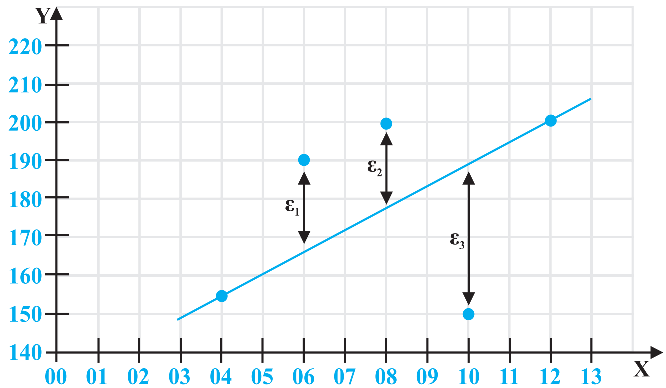
$155 = \alpha + 20 \quad \Leftrightarrow \quad 135 = \alpha$

Αρα η εξίσωση της ευθείας είναι: y = 135 + 5x



Β) Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων.

Εστω y_i η πραγματική τιμή που αντιστοιχεί στην τιμή x_i και y_i' μια εκτίμηση της y_i μέσω μιας ευθείας παλινδρόμησης. Τότε η διαφορά: $\varepsilon_i = y_i - y_i'$ παριστάνει το σφάλμα της εκτίμησης όπως φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα διασποράς.



Το άθροισμα $\sum_{i=1}^{\nu} \varepsilon_i^2$ ονομάζεται συνολικό τετραγωνικό σφάλμα. Η ευθεία με το ελάχιστο συνολικό τετραγωνικό σφάλμα ονομάζεται **ευθεία ελαχίστων τετραγώνων** και έχει εξίσωση:

$\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$. Οι τιμές $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ για τις οποίες το $\sum_{i=1}^{\nu} \varepsilon_i^2$ παίρνει την ελάχιστη τιμή του ονομάζονται εκτιμήτριες και υπολογίζονται από τους τύπους:

$$\hat{\beta} = \frac{\nu \sum_{i=1}^{\nu} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{\nu} y_i\right)}{\nu \sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)^2} \quad (1)$$

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x} \quad (2)$$

Η εκτιμήτρια $\hat{\alpha}$ παριστάνει την τιμή της μεταβλητής Y όταν η τιμή της μεταβλητής X είναι x = 0.

Η εκτιμήτρια $\hat{\beta}$ παριστάνει την μεταβολή της μεταβλητής Y όταν η X αυξάνεται κατά 1.

Παράδειγμα 28:
Να υπολογίσετε την εξίσωση της ευθείας ελαχίστων τετραγώνων του παραδείγματος 26 και να εκτιμήσετε την τιμή της Y όταν x = 5.

Απάντηση:

Κατασκευάζουμε τον βοηθητικό πίνακα. Έχουμε:

x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
3	150	450	9
4	155	620	16
6	170	1020	36
7	170	1190	49
8	190	1520	64
10	185	1850	100
12	200	2400	144
13	190	2470	169
$\sum_{i=1}^{8} x_i = 63$	$\sum_{i=1}^{8} y_i = 1410$	$\sum_{i=1}^{8} x_i y_i = 11520$	$\sum_{i=1}^{8} x_i^2 = 587$

$$\hat{\beta} = \frac{8\sum_{i=1}^{8} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{8} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{8} y_i\right)}{8\sum_{i=1}^{8} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{8} x_i\right)^2} = \frac{8\cdot 11520 - 63\cdot 1410}{8\cdot 587 - 63^2} = \frac{92160 - 88830}{4696 - 3969} = \frac{3330}{727} = 4,58$$

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x} = \frac{1410}{8} - \frac{3330}{727}\cdot\frac{63}{8} = 176,25 - 36,07 = 140,18$$

Άρα η ευθεία έχει εξίσωση: $\hat{y} = 140,18 + 4,58x$.

Ετσι για x = 5 θα έχουμε: $\hat{y} = 140,18 + 4,58\cdot 5 = 163,08$

Παρατηρήσεις:

1. Η ευθεία μας δίνει μια εκτίμηση της Y πάνω στη X **και όχι μια εκτίμηση της X πάνω στην Y.** Για το τελευταίο **πρέπει εκ νέου να υπολογίσουμε την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων** αφού αντιστρέψουμε το ρόλο των μεταβλητών.
2. Η ευθεία μας δίνει μια σωστή εκτίμηση της Y πάνω στη X μόνο για τιμές της X εντός των ακραίων τιμών ή για τιμές πολύ κοντά στις ακραίες.
3. Η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων **εξαρτάται άμεσα από τα δεδομένα ζεύγη (x_i,y_i).** Αν κάποιο ζεύγος προστεθεί στα δεδομένα ζεύγη, αφαιρεθεί από αυτά ή μεταβληθεί κάποιο από αυτά τότε και η ευθεία μεταβάλλεται.
4. Η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων διέρχεται πάντα από το σημείο $(\bar{x}, \bar{y})$. Πράγματι για $x = \bar{x}$ έχουμε: $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}\bar{x} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x} + \hat{\beta}\bar{x} = \bar{y}$

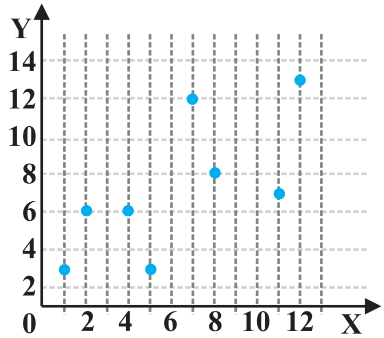
Λυμένες Ασκήσεις.

1. Για το διπλανό διάγραμμα διασποράς:

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας παλινδρόμησης και να την χαράξετε στο διάγραμμα διασποράς.

β) Εκτιμήστε την τιμή της μεταβλητής y όταν x = 6 χρησιμοποιώντας την ευθεία του ερωτήματος (α).

γ) Βρείτε την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων και εκτιμήστε πάλι την τιμή της μεταβλητής y όταν x = 6.



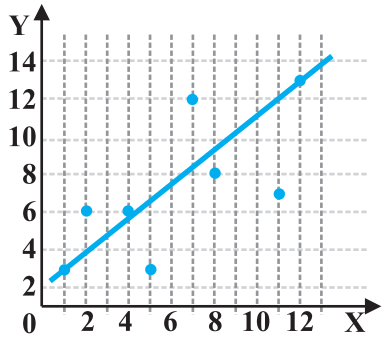
Λύση:

α) Θεωρούμε τα σημεία Α(1,3) και Β(12,13) και έστω y = α + βx η εξίσωση της ευθείας.

Τότε: $\left.\begin{matrix} 13 = \alpha + 12\beta \\ 3 = \alpha + \beta \end{matrix}\right\}$ Αφαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε:

$10 = 11\beta \Leftrightarrow \beta = \frac{10}{11}$

Άρα: $3 = \alpha + \frac{10}{11} \Leftrightarrow \alpha = \frac{23}{11}$ Άρα η εξίσωση της ευθείας είναι: $y = \frac{23}{11} + \frac{10}{11}x$



β) Για x = 6 έχουμε: $y = \frac{23}{11} + \frac{10}{11}6 = \frac{83}{11} \approx 7{,}55$

γ) Για την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων συμπληρώνουμε τον παρακάτω πίνακα:

x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i
1	3	1	3
2	6	4	12
4	6	16	24
5	3	25	15
7	12	49	84
8	8	64	64
11	7	121	77
12	13	144	156
$\sum_{i=1}^{8} x_i = 50$	$\sum_{i=1}^{8} y_i = 58$	$\sum_{i=1}^{8} x_i^2 = 424$	$\sum_{i=1}^{8} x_iy_i = 435$

Εχουμε: $\hat{\beta}=\dfrac{8\sum_{i=1}^{8}x_i y_i-\left(\sum_{i=1}^{8}x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{8}y_i\right)}{8\sum_{i=1}^{8}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{8}x_i\right)^2}=\dfrac{8\cdot 435-50\cdot 58}{8\cdot 424-50^2}=\dfrac{3480-2900}{3392-2500}=\dfrac{580}{892}\approx 0,65$

$\hat{\alpha}=\bar{y}-\hat{\beta}\bar{x}=\dfrac{58}{8}-\dfrac{580}{892}\dfrac{50}{8}=7,25-4,064=3,186$

Αρα η ευθεία έχει εξίσωση: $\hat{y}=3,186+0,65x$

Ετσι για $x=6$ θα έχουμε: $\hat{y}=3,186+0,65\cdot 6=7,086$

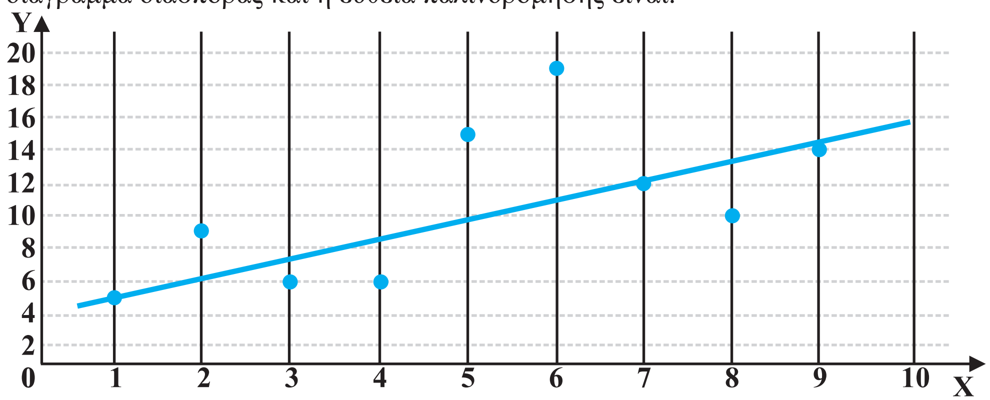
2. Εστω ο πίνακας:

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y	5	9	6	6	15	19	12	10	14

Να κατασκευάσετε το διάγραμμα διασποράς και να χαράξετε την ευθεία που προσεγγίζει καλύτερα τα σημεία. Κατόπιν να βρείτε την εξίσωση της ευθείας και να εκτιμήσετε την τιμή του y όταν $x=5,5$.

Λύση:

Το διάγραμμα διασποράς και η ευθεία παλινδρόμησης είναι:



Επιλέξαμε τα σημεία Α(1,5) και Β(7,12) και έστω: y = α + βx, η εξίσωση της ευθείας.

Τότε: $\left.\begin{aligned}12&=\alpha+7\beta\\ 5&=\alpha+\beta\end{aligned}\right\}$ Αφαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε: $7=6\beta \Leftrightarrow \beta=\dfrac{7}{6}$

Άρα: $5=\alpha+\dfrac{7}{6}\Leftrightarrow \alpha=\dfrac{23}{6}$

Άρα η εξίσωση της ευθείας είναι: $y=\dfrac{23}{6}+\dfrac{7}{6}x$. Για x = 5,5 έχουμε: $y=\dfrac{23}{6}+\dfrac{7}{6}5,5=10,25$

3. Στον παρακάτω παρακάτω πίνακα δίνονται οι τιμές των μεταβλητών X,Y.

X	12	19	22	26	30	38	39
Y	9	10	12	11	15	17	21

α) Να βρεθεί η ευθεία παλινδρόμησης της Y πάνω στη X με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων.
β) Ποιά είναι η αναμενόμενη τιμή της Y όταν x = 35;
γ) Τι επιπτώσεις επιφέρει στην Y η αύξηση της X κατά μια μονάδα;

Λύση:

α) Για την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων συμπληρώνουμε τον παρακάτω πίνακα

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
12	9	144	108
19	10	361	190
22	12	484	264
26	11	676	286
30	15	900	450
38	17	1444	646
39	21	1521	819
$\sum_{i=1}^{7} x_i = 186$	$\sum_{i=1}^{7} y_i = 95$	$\sum_{i=1}^{7} x_i^2 = 5530$	$\sum_{i=1}^{7} x_i y_i = 2763$

Έχουμε:

$$\hat{\beta} = \frac{7\sum_{i=1}^{7} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{7} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{7} y_i\right)}{7\sum_{i=1}^{7} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{7} x_i\right)^2} = \frac{7\cdot 2763 - 186\cdot 95}{7\cdot 5530 - 186^2} = \frac{19341-17670}{38710-34596} = \frac{1671}{4114} \approx 0,406$$

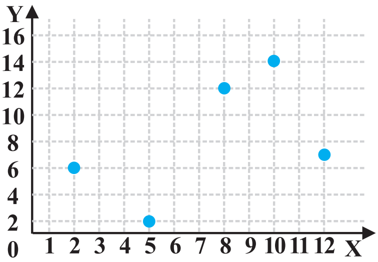
$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x} = \frac{95}{7} - \frac{1671}{4114}\frac{186}{7} \approx 13,571 - 10,793 = 2,778$$

Άρα η ευθεία έχει εξίσωση: $\hat{y} = 2,778 + 0,406x$

β) Για x = 35, θα έχουμε: $\hat{y} = 2,778 + 0,406 \cdot 35 = 16,988$

γ) Η αύξηση κατά μια μονάδα της μεταβλητής X θα επιφέρει την αύξηση της Y κατά 0,406 μονάδες περίπου.

4. Για το διπλανό διάγραμμα διασποράς:



α) Να βρείτε την εξίσωση μιας ευθείας παλινδρόμησης της Υ πάνω στην Χ και να την χαράξετε στο διάγραμμα διασποράς.

β) Υπολογίστε το συνολικό τετραγωνικό σφάλμα $\sum_{i=1}^{\nu} \varepsilon_i^2$ της ευθείας του ερωτήματος (α).

γ) Βρείτε την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων και υπολογίστε πάλι το συνολικό τετραγωνικό σφάλμα $\sum_{i=1}^{\nu} \varepsilon_i^2$. Συγκρίνετε τα δυο σφάλματα.

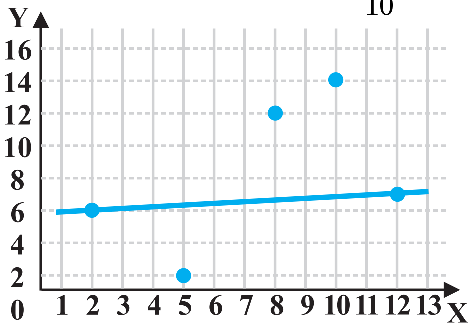
Λύση:

α) Επιλέγουμε τα σημεία σημεία Α(2,6) και Β(12,7) και έστω: y = α + βx, η εξίσωση της ευθείας. Τότε: $\left.\begin{array}{l} 7 = \alpha + 12\beta \\ 6 = \alpha + 2\beta \end{array}\right\}$ Αφαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε: $1 = 10\beta \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{10} = 0{,}1$

Άρα: $6 = \alpha + 0{,}2 \Leftrightarrow \alpha = 5{,}8$

Αρα η εξίσωση της ευθείας είναι: $y = 5{,}8 + 0{,}1x$

Η ευθεία στο διάγραμμα διασποράς θα είναι:



β) Για $x = 5$ έχουμε: $y = 5{,}8 + 0{,}1 \cdot 5 = 6{,}3$

Για $x = 8$ έχουμε: $y = 5{,}8 + 0{,}1 \cdot 8 = 6{,}6$

Για $x = 10$ έχουμε: $y = 5{,}8 + 0{,}1 \cdot 10 = 6{,}8$

Για τον υπολογισμό του σφάλματος συμπληρώνουμε τον παρακάτω πίνακα

x_i	y_i	Εκτιμούμενη τιμή $y_i{'}$	$y_i - y_i{'}$	$(y_i - y_i{'})^2$
2	6	6	0	0
5	2	6,3	- 4,3	18,49
8	1,2	6,6	5,4	29,16
10	1,4	6,8	7,2	51,84
12	7	7	0	0
				$\sum_{i=1}^{5}(y_i - y_i{'})^2 = 99{,}49$

γ) Για την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων έχουμε:

x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i
2	6	4	12
5	2	25	10
8	12	64	96
10	14	100	140
12	7	144	84
$\sum_{i=1}^{5} x_i = 37$	$\sum_{i=1}^{5} y_i = 41$	$\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 337$	$\sum_{i=1}^{5} x_iy_i = 342$

Εχουμε: $\hat{\beta} = \dfrac{5\sum_{i=1}^{5} x_iy_i - \left(\sum_{i=1}^{5} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{5} y_i\right)}{5\sum_{i=1}^{5} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{5} x_i\right)^2} = \dfrac{5\cdot 342 - 37\cdot 41}{5\cdot 337 - 37^2} = \dfrac{1710-1517}{1685-1369} = \dfrac{193}{316} \approx 0,6$

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x} = \frac{41}{5} - \frac{193}{316}\frac{37}{5} \approx 8,2 - 4,52 = 3,68$$

Άρα η ευθεία έχει εξίσωση: $\hat{y} = 3,68 + 0,61x$

Για $x = 2$ έχουμε: $\hat{y} = 3,68 + 0,61 \cdot 2 = 4,9$

Για $x = 5$ έχουμε: $\hat{y} = 3,68 + 0,61 \cdot 5 = 6,73$

Για $x = 8$ έχουμε: $\hat{y} = 3,68 + 0,61 \cdot 8 = 8,56$

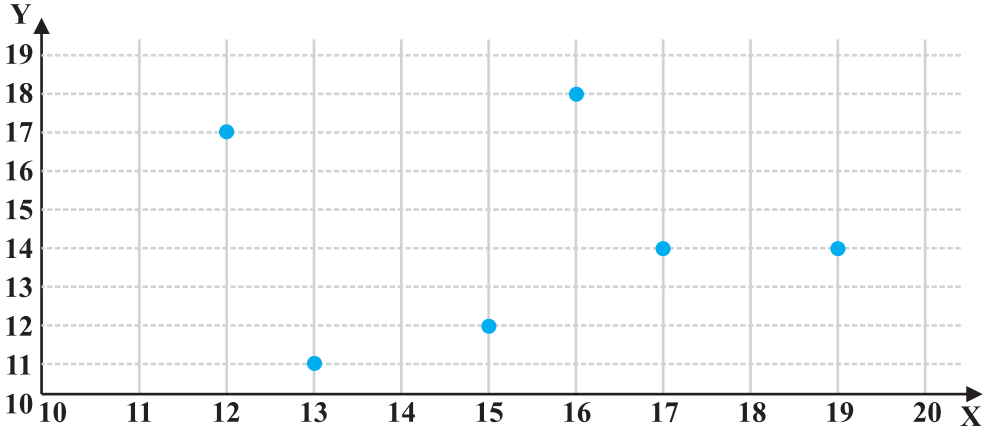
Για $x = 10$ έχουμε: $\hat{y} = 3,68 + 0,61 \cdot 10 = 9,78$

Για $x = 12$ έχουμε: $\hat{y} = 3,68 + 0,61 \cdot 12 = 11$

Για τον υπολογισμό του σφάλματος συμπληρώνουμε τον παρακάτω πίνακα:

x_i	y_i	$\hat{y}_i$	$y_i - \hat{y}_i$	$(y_i - \hat{y}_i)^2$
2	6	4,9	1,1	1,21
5	2	6,73	- 4,73	22,3729
8	12	8,56	3,44	11,8336
10	14	9,78	4,22	17,8084
12	7	11	- 4	16
				$\sum_{i=1}^{5}(y_i - \hat{y}_i)^2 = 69,2249$

5. Για το παρακάτω διάγραμμα διασποράς να βρεθεί η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων. Για ποιό από τα σημεία η ευθεία δίνει την καλύτερη εκτίμηση;



Λύση:

Από το διάγραμμα διασποράς συμπληρώνουμε τον παρακάτω πίνακα:

x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i
12	17	144	204
13	11	169	143
15	12	225	180
16	18	256	288
17	14	289	238
19	14	361	266
$\sum_{i=1}^{6} x_i = 92$	$\sum_{i=1}^{6} y_i = 86$	$\sum_{i=1}^{6} x_i^2 = 1444$	$\sum_{i=1}^{6} x_iy_i = 1319$

Έχουμε: $\hat{\beta} = \dfrac{6\sum_{i=1}^{6} x_iy_i - \left(\sum_{i=1}^{6} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{6} y_i\right)}{6\sum_{i=1}^{6} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{6} x_i\right)^2} = \dfrac{6\cdot 1319 - 92\cdot 86}{6\cdot 1444 - 92^2} = \dfrac{7914-7912}{8664-8464} = \dfrac{2}{200} = 0{,}01$

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x} = \frac{86}{6} - 0{,}01\frac{92}{6} \approx 14{,}333 - 0{,}153 = 14{,}18$$

Αρα η ευθεία έχει εξίσωση: $\hat{y} = 14{,}18 + 0{,}01x$

Άρα για $x = 12$ έχουμε: $\hat{y} = 14{,}18 + 0{,}01 \cdot 12 = 14{,}3$

$x = 13$ έχουμε: $\hat{y} = 14{,}18 + 0{,}01 \cdot 13 = 14{,}31$

$x = 15$ έχουμε: $\hat{y} = 14{,}18 + 0{,}01 \cdot 15 = 14{,}33$

$x = 16$ έχουμε: $\hat{y} = 14{,}18 + 0{,}01 \cdot 16 = 14{,}34$

$x = 17$ έχουμε: $\hat{y} = 14{,}18 + 0{,}01 \cdot 17 = 14{,}35$

$x = 19$ έχουμε: $\hat{y} = 14{,}18 + 0{,}01 \cdot 19 = 14{,}37$

x_i	y_i	$\hat{y}_i$	$y_i - \hat{y}_i$	$(y_i - \hat{y}_i)^2$
12	**17**	**14,3**	**2,7**	**7,29**
13	**11**	**14,31**	**- 3,31**	**10,9561**
15	**12**	**14,33**	**- 2,33**	**5,4289**
16	**18**	**14,34**	**3,66**	**13,3956**
17	**14**	**14,35**	**- 0,35**	**0,1225**
19	**14**	**14,37**	**- 0,37**	**0,1369**

Η καλύτερη εκτίμηση δόθηκε για το σημείο (17, 14).

6. α) Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

$x_i > 0$	$y_i > 0$	x_i^2	$x_i y_i$	y_i^2
			8	**16**
	5	**16**		
5			**40**	
7	**10**			
8				**144**
$\sum_{i=1}^{5} x_i =$	$\sum_{i=1}^{5} y_i =$	$\sum_{i=1}^{5} x_i^2 =$	$\sum_{i=1}^{5} x_i y_i =$	$\sum_{i=1}^{5} y_i^2 =$

β) Προσαρμόστε μια ευθεία ελαχίστων τετραγώνων στα δεδομένα του παραπάνω πίνακα παίρνοντας την x ως ανεξάρτητη μεταβλητή.

γ) Εκτιμήστε την τιμή του y όταν $x = 6$.

δ) Επαναλάβετε το ερώτημα (α) με ανεξάρτητη μεταβλητή την y και εκτιμήστε την τιμή του x για $y = 6$.

Λύση:

α) Έχουμε: $y_1^2 = 16 \overset{y_1>0}{\Leftrightarrow} y_1 = 4$, άρα: $x_1 = \frac{8}{4} = 2$

Επίσης: $x_2^2 = 16 \overset{x_2>0}{\Leftrightarrow} x_2 = 4$, $y_3 = \frac{40}{5} = 8$, $y_5^2 = 144 \overset{y_1>0}{\Leftrightarrow} y_5 = 12$

Άρα ο πίνακας θα είναι:

$x_i > 0$	$y_i > 0$	x_i^2	$x_i y_i$	y_i^2
2	4	4	8	16
4	5	16	20	25
5	8	25	40	64
7	10	49	70	100
8	12	64	96	144
$\sum_{i=1}^{5} x_i = 26$	$\sum_{i=1}^{5} y_i = 39$	$\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 158$	$\sum_{i=1}^{5} x_i y_i = 234$	$\sum_{i=1}^{5} y_i^2 = 349$

β) Για την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων έχουμε:

$$\hat{\beta} = \frac{5\sum_{i=1}^{5} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{5} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{5} y_i\right)}{5\sum_{i=1}^{5} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{5} x_i\right)^2} = \frac{5 \cdot 234 - 26 \cdot 39}{5 \cdot 158 - 26^2} = \frac{1170 - 1014}{790 - 676} = \frac{156}{114} \approx 1{,}368$$

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x} = \frac{39}{5} - \frac{156}{114}\frac{26}{5} \approx 7{,}8 - 7{,}116 = 0{,}684$$

Άρα η ευθεία έχει εξίσωση: $\hat{y} = 0{,}684 + 1{,}368x$

γ) Για $x = 6$ έχουμε: $\hat{y} = 0{,}684 + 1{,}368 \cdot 6 = 8{,}892$

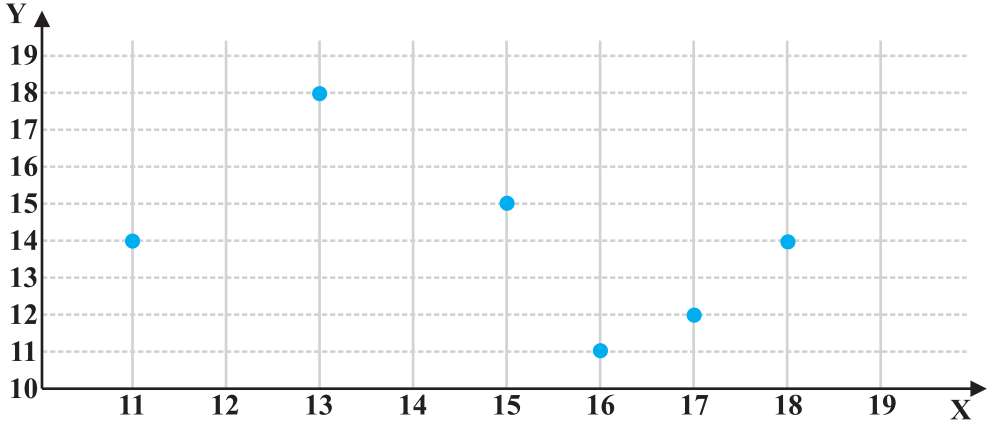
δ) $$\hat{\beta} = \frac{5\sum_{i=1}^{5} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{5} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{5} y_i\right)}{5\sum_{i=1}^{5} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{5} y_i\right)^2} = \frac{5 \cdot 234 - 26 \cdot 39}{5 \cdot 349 - 39^2} = \frac{1170 - 1014}{1745 - 1521} = \frac{156}{224} \approx 0{,}696$$

$$\hat{\alpha} = \bar{x} - \hat{\beta}\bar{y} = \frac{26}{5} - \frac{156}{224}\frac{39}{5} \approx 5{,}2 - 5{,}432 = -0{,}232$$

Άρα η ευθεία έχει εξίσωση: $\hat{x} = -0{,}232 + 0{,}696y$

Για $y = 6$ έχουμε: $\hat{x} = -0{,}232 + 0{,}696 \cdot 6 = 3{,}944$

7. Στον παρακάτω διάγραμμα διασποράς φαίνονται οι βαθμοί των Μαθηματικών Χ και οι βαθμοί της Φυσικής Υ 6 μαθητών της Γ΄Λυκείου:



α) Να βρεθεί η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων που εκτιμά το βαθμό της Φυσικής πάνω στο βαθμό των Μαθηματικών και να την χαράξετε στο διάγραμμα διασποράς.

β) Να βρεθεί το συνολικό τετραγωνικό σφάλμα.

γ) Πως μεταβάλλεται ο βαθμός της Φυσικής όταν ο βαθμός των Μαθηματικών αυξάνεται κατα 2 μονάδες ;

δ) Σε ένα άλλο σχολείο για τα δυο μαθήματα ισχύουν τα εξής:

ι) η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων που εκτιμά το βαθμό της Φυσικής πάνω στο βαθμό των Μαθηματικών είναι παράλληλη στην πρώτη.

ιι) Ενας μαθητής που έγραψε 14 στα Μαθηματικά εκτιμήθηκε ότι στη Φυσική θα γράψει 17. Τι βαθμό θα πάρει στη Φυσική ένας μαθητής που έγραψε 11 στα Μαθηματικά;

Λύση:

α) Για την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων συμπληρώνουμε τον παρακάτω πίνακα:

Βαθμός Μαθηματικών x_i	Βαθμός Φυσικής y_i	x_i^2	$x_i y_i$
11	14	121	154
13	18	169	234
15	15	225	225
16	11	256	176
17	12	289	204
18	14	324	252
$\sum_{i=1}^{6} x_i = 90$	$\sum_{i=1}^{6} y_i = 84$	$\sum_{i=1}^{6} x_i^2 = 1384$	$\sum_{i=1}^{6} x_i y_i = 1245$

$$\hat{\beta}=\frac{6\sum_{i=1}^{6}x_iy_i-\left(\sum_{i=1}^{6}x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{6}y_i\right)}{6\sum_{i=1}^{6}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{6}x_i\right)^2}=\frac{6\cdot1245-90\cdot84}{6\cdot1384-90^2}=\frac{7470-7560}{8304-8100}=\frac{-90}{204}\approx-0,441$$

$$\hat{\alpha}=\overline{y}-\hat{\beta}\overline{x}=\frac{84}{6}-\frac{-90}{204}\frac{90}{6}\approx14+6,618=20,618$$

Άρα η ευθεία έχει εξίσωση: $\hat{y}=20,618-0,441x$

β) Για το συνολικό τετραγωνικό σφάλμα έχουμε:

για $x=11$ έχουμε: $\hat{y}=20,618-0,441\cdot11=15,767$

για $x=13$ έχουμε: $\hat{y}=20,618-0,441\cdot13=14,885$

για $x=15$ έχουμε: $\hat{y}=20,618-0,441\cdot15=14,003$

για $x=16$ έχουμε: $\hat{y}=20,618-0,441\cdot16=13,562$

για $x=17$ έχουμε: $\hat{y}=20,618-0,441\cdot17=13,121$

για $x=18$ έχουμε: $\hat{y}=20,618-0,441\cdot18=12,680$

x_i	y_i	$\hat{y}_i$	$y_i-\hat{y}_i$	$(y_i-\hat{y}_i)^2$
11	**14**	**15,767**	**-1,767**	**3,122**
13	**18**	**14,885**	**3,115**	**9,703**
15	**15**	**14,003**	**0,997**	**0,994**
16	**11**	**13,562**	**-2,562**	**6,564**
17	**12**	**13,121**	**- 1,121**	**1,257**
18	**14**	**12,680**	**1,32**	**1,742**
				$\sum_{i=1}^{6}(y_i-\hat{y}_i)^2=23,382$

γ) Έστω:

$$\left.\begin{aligned}\hat{y}&=\hat{\alpha}+\hat{\beta}x\\ \hat{y}'&=\hat{\alpha}+\hat{\beta}(x+2)\end{aligned}\right\}\overset{(-)}{\Leftrightarrow}\hat{y}'-\hat{y}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}(x+2)-\hat{\alpha}-\hat{\beta}x\Leftrightarrow\Delta\hat{y}=2\hat{\beta}$$

Άρα θα μειωθεί κατά $2\hat{\beta}=0,882$ μονάδες.

δ) Έστω $\hat{y}' = \hat{\alpha}' + \hat{\beta}'x$ η ευθεία. Λόγω παραλληλίας $\hat{\beta}' = \hat{\beta} = -0{,}441$.

Επίσης η ευθεία διέρχεται από το (14, 17). Άρα $17 = \hat{\alpha}' - 0{,}441 \cdot 14 \Leftrightarrow \hat{\alpha}' = 23{,}174$

Άρα για x = 11, έχουμε: $\hat{y} = 23{,}174 - 0{,}441 \cdot 11 = 18{,}323$

8. Μια ευθεία ελαχίστων τετραγώνων εκτιμά το μέσο αριθμό πόντων πάνω στο μέσο χρόνο συμμετοχής (σε min) ενός καλαθοσφαιριστή και έχει εξίσωση $\hat{y} = 1{,}8 + 0{,}7x$.

α) Να βρεθεί ο μέσος αριθμός πόντων ενός παίκτη με μέσο χρόνο συμμετοχής 12min.

β) Πόσους πόντους κατά μέσο όρο επιπλέον μπορεί να σημειώσει ο παίκτης αν αυξηθεί ο μέσος χρόνος συμμετοχής κατά 2min;

γ) Σε μια άλλη ομάδα η αντίστοιχη ευθεία ελαχίστων τετραγώνων είναι παράλληλη στην πρώτη. Αν ένας παίκτης με μέσο χρόνο συμμετοχής 8min εκτιμήθηκε ότι σημειώνει κατά μέσο όρο 11,5 πόντους πόσους πόντους θα σημειώσει ένας συμπαίκτης του με μέσο χρόνο συμμετοχής 10min;

Λύση:

α) Για x = 12 έχουμε: $\hat{y} = 1{,}8 + 0{,}7 \cdot 12 = 10{,}2$ πόντους.

β) Οταν η X μεταβάλλεται κατά 1 τότε η Y μεταβάλλεται κατά $\hat{\beta}$ άρα αν ο μέσος χρόνος συμμετοχής αν αυξηθεί κατά 2min θα έχουμε αύξηση στο μέσο αριθμό πόντων κατά $2\hat{\beta} = 1{,}4$.

γ) Έστω $\hat{y}' = \hat{\alpha}' + \hat{\beta}'x$, η εξίσωση της ευθείας ελαχίστων τετραγώνων της άλλης ομάδας. Τότε λόγω παραλληλίας: $\hat{\beta}' = \hat{\beta} = 0{,}7$. Το ζεύγος (8, 11.5) επαληθεύει την εξίσωση άρα:
$11{,}5 = \hat{\alpha}' + 0{,}7 \cdot 8 \Leftrightarrow \hat{\alpha}' = 11{,}5 - 5{,}6 = 5{,}9$
Άρα η εξίσωση θα είναι: $\hat{y} = 5{,}9 + 0{,}7x$
Άρα για x = 10 έχουμε: $\hat{y}' = 5{,}9 + 0{,}7 \cdot 10 = 12{,}9$ πόντους.

Ερωτήσεις Σωστό - Λάθος.

1. Η ανάλυση παλινδρόμησης είναι ο κλάδος της Στατιστικής που εξετάζει τη σχέση μεταξύ δύο ή περισσότερων μεταβλητών με απώτερο σκοπό την πρόβλεψη μιας από αυτές μέσω των άλλων. ( )

2. Στην απλή γραμμική παλινδρόμηση υπάρχει μόνο μια ανεξάρτητη μεταβλητή X και μια εξαρτημένη μεταβλητή Y η οποία μπορεί να προσεγγιστεί ικανοποιητικά από μια γραμμική συνάρτηση του X. ( )

3. Όταν μας ενδιαφέρει το βάρος Y ενός πλήθους ατόμων όταν αλλάζει το ύψος τους X τότε η Y είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή και η X η εξαρτημένη. ( )

4. Όταν μας ενδιαφέρει το βάρος Y ενός πλήθους ατόμων όταν αλλάζει το ύψος τους X τότε ενδιαφερόμαστε για την παλινδρόμηση του βάρους Y πάνω στο ύψος X. ( )

5. Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων χρησιμοποιείται για την εύρεση της εξίσωσης της καλύτερης ευθείας γραμμής σε ένα διάγραμμα διασποράς, που προσαρμόζεται στα δεδομένα. ( )

6. Η ευθεία των ελαχίστων τετραγώνων είναι η ευθεία που ελαχιστοποιεί την ποσότητα: $\sum_{i=1}^{\nu} \varepsilon_i^2$. ( )

7. Για να χαράξουμε την ευθεία παλινδρόμησης ενώνουμε πάντα τα σημεία που προκύπτουν από τις ακραίες παρατηρήσεις. ( )

8. Η εκτιμήτρια της παραμέτρου α δίνεται από τον τύπο: $\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x}$. ( )

9. Η εκτιμήτρια $\hat{\beta}$ είναι πάντα θετική. ( )

10. Η εξίσωση της ευθείας των ελαχίστων τετραγώνων δεν αλλάζει αν κάποιο από τα δεδομένα ζεύγη (x_i, y_i) παραλειφθεί. ( )

11. Η ευθεία: $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$, καλείται ευθεία ελαχίστων τετραγώνων ή ευθεία παλινδρόμησης της X πάνω στη Y. ( )

12. Η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$ διέρχεται από το σημείο $(\bar{x}, \bar{y})$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης το $\hat{\beta}$. ( )

13. Στην εξίσωση ελαχίστων τετραγώνων η τιμής της εκτιμήτριας $\hat{\alpha}$ της παραμέτρου α παριστάνει την τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής Y όταν $x = 0$. ( )

14. Όταν $\hat{\alpha} = 0$ τότε η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων. ( )

15. Ο συντελεστής διεύθυνσης $\hat{\beta}$ της ευθείας των ελαχίστων τετραγώνων παριστάνει τη μεταβολή της εξαρτημένης μεταβλητής Y όταν η X μεταβληθεί κατά μία μονάδα. ( )

16. Όταν η x αυξηθεί κατά μία μονάδα τότε η $\hat{y}$ αυξάνεται κατά $\hat{\beta}$ μονάδες όταν: $\beta < 0$. ( )

Ερωτήσεις Πολλαπλής Επιλογής.

1. Η εκτιμήτρια $\hat{\alpha}$ παριστάνει:
   α) Την τιμή της μεταβλητής X όταν $y = 0$.
   β) Την κλίση της ευθείας παλινδρόμησης.
   γ) Την τιμή της μεταβλητής Y όταν $x = 0$.
   δ) Τη διαφορά των μεταβλητών $X - Y$.
   ε) Τίποτε από τα παραπάνω.

2. Αν η ευθεία παλινδρόμησης έχει τύπο $\hat{y} = 0{,}5 + x$, ο συντελεστής παλινδρόμησης είναι:
   α) 1 β) 0,5 γ) θετικός δ) αρνητικός ε) 0

3. Αν η ευθεία παλινδρόμησης έχει τύπο $\hat{y} = = 5 + 0{,}3x$, και το x αυξηθεί κατά μια μονάδα τότε η $\hat{y}$:
   α) Παραμένει αμετάβλητη.
   β) Αυξάνεται κατά μια μονάδα.
   γ) Δεν μπορούμε να γνωρίζουμε
   δ) Αυξάνεται κατά μια 0,3 μονάδες.
   ε) Τίποτε από τα παραπάνω.

4. Αν η ευθεία παλινδρόμησης έχει τύπο: $y = 2 - 2x$, ο συντελεστής παλινδρόμησης είναι:
   α) 2 β) 1 γ) 0 δ) - 2 ε) τίποτε από τα προηγούμενα.

5. Εστω η ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$ της μεταβλητής Y πάνω στη X. Αν είναι $\hat{\beta} < 0$ και το x αυξηθεί κατά μια μονάδα τότε η $\hat{y}$:

α) Παραμένει αμετάβλητη. β) Αυξάνεται κατά μια μονάδα.

γ) Ελαττώνεται κατά $|\hat{\beta}|$ δ) Ελαττώνεται κατά μια μονάδα.

ε) Τίποτε από τα παραπάνω.

6. Ο συντελεστής διεύθυνσης $\hat{\beta}$ της ευθείας $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$ παριστάνει τη μεταβολή της εξαρτημένης μεταβλητής Y όταν το X μεταβληθεί κατά: 3.

α) μία μονάδα β) δύο μονάδες γ) τρεις μονάδες δ) $\hat{\alpha}$ μονάδες

ε) $\hat{\beta}$ μονάδες

7. Με βάση την ευθεία παλινδρόμησης $\hat{y} = 5 + 0{,}2x$, με $0{,}4 \le x \le 1$, η προβλεπόμενη τιμή $\hat{y}$ για x = 5 είναι:

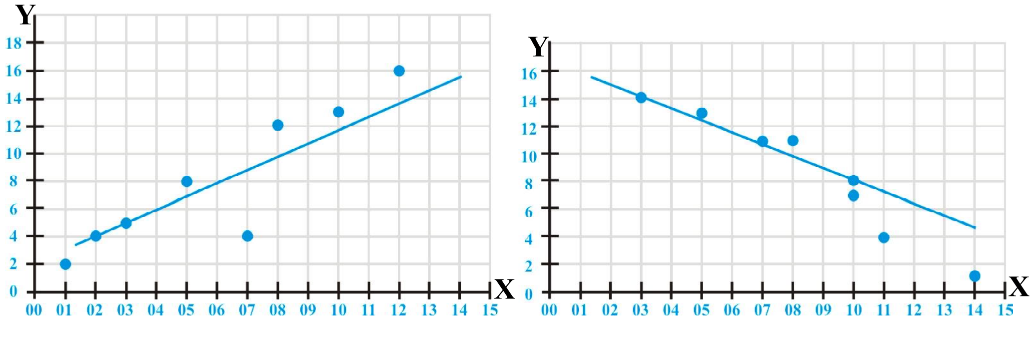
α) 5 β) 0,2 γ) 6 δ) 1 ε) δεν μπορούμε να ξέρουμε

8. Με βάση την ευθεία παλινδρόμησης $\hat{y} = 10 + 3{,}1x$, με $0 \le x \le 20$, η προβλεπόμενη τιμή $\hat{y}$ για x = 10 είναι:

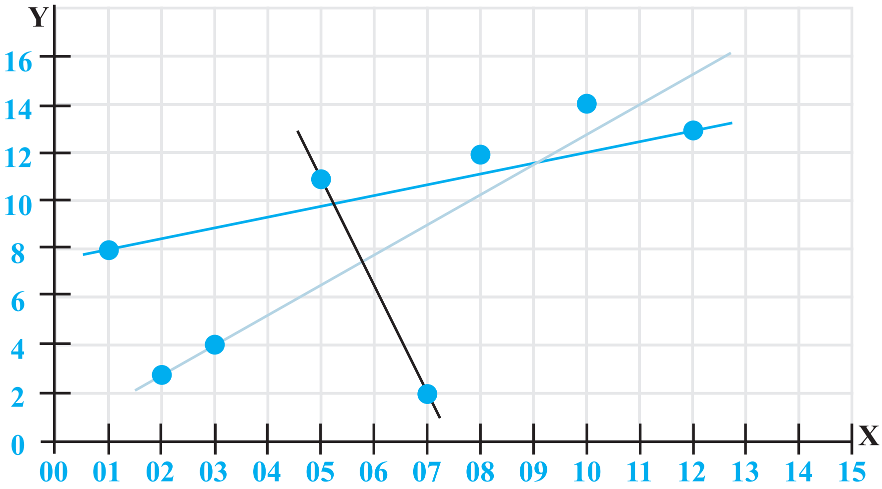
α) 31 β) 41 γ) 20 δ) 3,1 ε) δεν μπορούμε να ξέρουμε

Ασκήσεις.

1. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας γραμμικής παλινδρόμησης για τα επιλεγμένα σημεία στα παρακάτω διαγράμματα διασποράς.



2. Βρείτε ποιά από τις τρεις ευθείες είναι η καλύτερη για το παρακάτω διάγραμμα διασποράς.



3. Εστω ο παρακάτω πίνακας:

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y	3	7	8	14	18	21	20	27	26

Να κατασκευάσετε το διάγραμμα διασποράς και να χαράξετε την ευθεία που προσεγγίζει καλύτερα τα σημεία. Κατόπιν να βρείτε την εξίσωση της ευθείας και να εκτιμήσετε την τιμή του y όταν $x = 11$.

4. Εστω ο παρακάτω πίνακας:

X	1	2	3	5	6	8	9	10	12
Y	3	7	6	13	12	15	23	22	24

α) Να υπολογιστεί η εξίσωση της ευθείας ελαχίστων τετραγώνων.

β) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα διασποράς και να χαράξετε την ευθεία.

5. Εστω ο πίνακας Βάρους – Υψους για 6 παιδιά της ίδιας ηλικίας:

Βάρος(Kgr)	54	56	58	58	59	62
Ύψος(cm)	149	154	155	162	156	159

α) Να υπολογιστεί η εξίσωση της ευθείας παλινδρόμησης με ανεξάρτητη μεταβλητή το βάρος.

β) Τι ύψος πρέπει να έχει ένα παιδί 65 κιλών;

γ) Να υπολογιστεί η εξίσωση της ευθείας παλινδρόμησης με ανεξάρτητη μεταβλητή το ύψος.

δ) Τι βάρος πρέπει να έχει ένα παιδί ύψους 173 cm;

6. Η επίδοση 6 μαθητών στα Μαθηματικά σε προφορικά και γραπτά δίνεται από τον πίνακα:

Προφ.	12	14	14	15	17	18
Γραπτα	09	14	15	12	15	15

α) Να υπολογιστεί η εξίσωση της ευθείας παλινδρόμησης με ανεξάρτητη μεταβλητή το βαθμό των προφορικών.

β) Τι βαθμό αναμένεται να πάρει στα γραπτά ένας

μαθητής με βαθμό προφορικών 10;

γ) Να υπολογιστεί η εξίσωση της ευθείας παλινδρόμησης με ανεξάρτητη μεταβλητή το βαθμό των γραπτών.

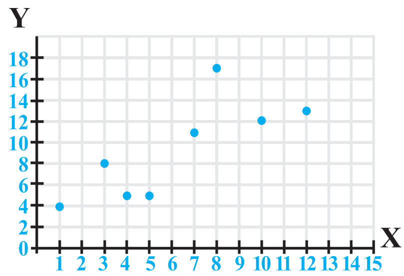
δ) Τι βαθμό προφορικών αναμένεται να πάρει ένας μαθητής που έγραψε για 17;

7. Για το διπλανό διάγραμμα διασποράς:

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας παλινδρόμησης και να την χαράξετε στο διάγραμμα διασποράς.

β) Εκτιμήστε την τιμή της μεταβλητής y όταν x = 6 χρησιμοποιώντας την ευθεία του ερωτήματος (α).

γ) Βρείτε την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων και εκτιμήστε πάλι την τιμή της μεταβλητής y όταν x = 6.

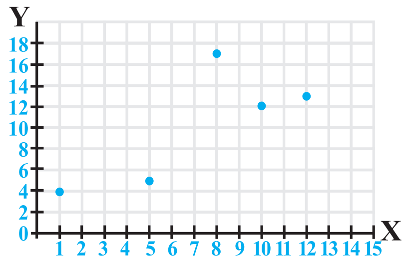


8. Για το διπλανό διάγραμμα διασποράς:

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας παλινδρόμησης και να την χαράξετε στο διάγραμμα διασποράς.

β) Υπολογίστε το συνολικό τετραγωνικό σφάλμα $\sum_{i=1}^{\nu} \varepsilon_i^2$ της ευθείας του ερωτήματος (α).

γ) Βρείτε την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων και υπολογίστε πάλι το συνολικό τετραγωνικό σφάλμα $\sum_{i=1}^{\nu} \varepsilon_i^2$.Συγκρίνετε τα δυο σφάλματα.



9. Για τον διπλανό πίνακα να κατασκευάσετε το διάγραμμα διασποράς με ανεξάρτητη μεταβλητή το x.

X	1	3	4	6	8	9
Y	9	17	15	20	25	29

α) Να χαράξετε την ευθεία που προσεγγίζει καλύτερα τα σημεία. Αφού βρείτε την εξίσωση της ευθείας να εκτιμήσετε την τιμή του y όταν $x = 5$.

β) Να υπολογίσετε την εξίσωση της ευθείας με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων και να εκτιμήσετε την τιμή του y όταν x = 5.

10. Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι τιμές των μεταβλητών X,Y.

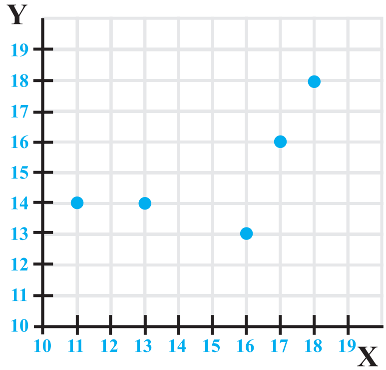
X	17	23	25	28	31	41	42
Y	10	12	15	15	20	23	28

α) Να βρεθεί η ευθεία παλινδρόμησης της Y πάνω στη X με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων.

β) Ποιά είναι η αναμενόμενη τιμή της Y όταν X = 35;

γ) Τι επιπτώσεις επιφέρει στην Y η αύξηση της X κατά μια μονάδα;

11.



Για το διπλανό διάγραμμα διασποράς να βρεθεί η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων. Για ποιό από τα σημεία η ευθεία δίνει την καλύτερη εκτίμηση;

12. α) Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

$x_i > 0$	$y_i > 0$	x_i^2	$x_i y_i$	y_i^2
1	4			
	5	9		
4			20	
		36	60	
		49		121
9	14			
			176	256
14	16			
$\sum_{i=1}^{8} x_i =$	$\sum_{i=1}^{8} y_i =$	$\sum_{i=1}^{8} x_i^2 =$	$\sum_{i=1}^{8} x_i y_i =$	$\sum_{i=1}^{8} y_i^2 =$

β) Προσαρμόστε μια ευθεία ελαχίστων τετραγώνων στα δεδομένα του παραπάνω πίνακα παίρνοντας την x ως ανεξάρτητη μεταβλητή.

γ) Εκτιμήστε την τιμή του y όταν x = 12.

δ) Επαναλάβετε το ερώτημα (β) με ανεξάρτητη μεταβλητή την y και εκτιμήστε την τιμή του x για y = 12

13. Στον διπλανό πίνακα δίνονται οι βαθμοί 5 φοιτητών στο ίδιο μάθημα για τις δύο εξεταστικές περιόδους.

α) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα διασποράς.

β) Προσαρμόστε στα δεδομένα μια ευθεία ελαχίστων τετραγώνων με ανεξάρτητη μεταβλητή την x και παραστήστε γραφικά την ευθεία αυτή στο διάγραμμα διασποράς.

x	1η Εξ. Περ.	5	6	8	8	10
y	2η Εξ. Περ.	6	4	7	9	9

14. α) Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i
2	5		
4	5		
5	7		
7	11		
8	14		
10	12		
11	10		
15	15		
$\sum_{i=1}^{8} x_i =$	$\sum_{i=1}^{8} y_i =$	$\sum_{i=1}^{8} x_i^2 =$	$\sum_{i=1}^{8} x_i y_i =$

β) Προσαρμόστε μια ευθεία ελαχίστων τετραγώνων στα δεδομένα του παραπάνω πίνακα παίρνοντας την x ως ανεξάρτητη μεταβλητή.

γ) Εκτιμήστε την τιμή του y όταν x = 13.

δ) Σχεδιάστε την ευθεία στο διάγραμμα διασποράς.

15. Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι βαθμοί στην Άλγεβρα και τη Γεωμετρία 10 μαθητών της Β΄ Λυκείου.

Άλγεβρα (x)	07	09	10	12	12	14	15	15	18	19
Γεωμετρία (y)	04	05	11	12	10	16	14	17	15	16

α) Παραστήστε γραφικά τα δεδομένα σε ένα διάγραμμα διασποράς.

β) Προσαρμόστε στα δεδομένα μια ευθεία ελαχίστων τετραγώνων με ανεξάρτητη μεταβλητή την x.

γ) Ένας μαθητής πήρε 13 μονάδες στην Άλγεβρα. Τι βαθμό αναμένεται να έχει στη Γεωμετρία;

16. Εστω X ο γενικός μέσος όρος των μαθητών της Γ΄Λυκείου και Y η πιθανότητα επιτυχίας (σε %) στην σχολή της επιλογής τους.

α) Αν το 1ο Λύκειο και το 2ο Λύκειο έχουμε: $(\bar{x}, \bar{y}) = (15{,}45)$, τι πιθανότητα επιτυχίας έχει στο 2ο Λύκειο ένας μαθητής με μέσο όρο x = 17,5 όταν για: x = 16 από την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων εκτιμάται ότι θα έχει πιθανότητα επιτυχίας 54% ;

β) Σε ποιό Λύκειο θα ήταν προτιμότερο να πάει ένας μαθητής με γενικό μέσο όρο 13 αν στο 1ο Λύκειο όταν ο γενικός μέσος όρος αυξάνεται κατά 1 μονάδα το ποσοστό επιτυχίας που εκτιμάται από την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων αυξάνεται κατά 4%.

17. Το ποσοστό % επιτυχίας για ένα διαγωνισμό εκτιμάται πάνω στο πλήθος των διαγωνιζομένων (σε χιλιάδες) από μια ευθεία ελαχίστων τετραγώνων. Αν γνωρίζουμε ότι $x \in [5, 21]$ για κάθε 500 επιπλέον υποψήφιους το ποσοστό επιτυχίας αυξάνει κατά 1,5% και ότι για 8.000 υποψήφιους εκτιμήθηκε 60% ποσοστό επιτυχίας να βρεθεί το πλήθος των επιτυχόντων σε 10.000 υποψήφιους.

18. Δυο ευθείες ελαχίστων τετραγώνων ε_1 και ε_2 είναι κάθετες μεταξύ τους.

α) Αν η ε_1 διέρχεται από τα σημεία (4,8) και (7,13) εκτιμήστε την τιμή της μεταβλητής y για x = 6 με τη βοήθεια της ε_2 αν η τελευταία διέρχεται από το σημείο (10,18).

β) Για ποιό x οι ευθείες δίνουν την ίδια εκτίμηση;

19. Δυο παράλληλες ευθείες ελαχίστων τετραγώνων ε_1 και ε_2 εκτιμούν το βαθμό στο μάθημα της Γεωμετρίας πάνω στο βαθμό της Αλγεβρας σε δυο τμήματα της Β΄Λυκείου, Β1 και Β2 αντίστοιχα. Στο Β1 εκτιμήθηκε ότι ένας μαθητής που έγραψε 12 στην Άλγεβρα θα γράψει 8,5 στη Γεωμετρία και στο Β2 εκτιμήθηκε ότι ένας μαθητής που έγραψε 15 στην Άλγεβρα θα γράψει 11,5 στη Γεωμετρία. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας των ελαχίστων τετραγώνων στο τμήμα Β1 αν γνωρίζουμε ότι για βαθμό Αλγεβρας ίσο με 15 στο τμήμα Β2 ο βαθμός της Γεωμετρίας εκτι-μάται 2 μονάδες παραπάνω από το Β1.

20. Η μέση τιμή των βαθμών 30 μαθητών σε ένα διαγώνισμα Αλγεβρας είναι: $\bar{x} = 14{,}5$ και σε ένα διαγώνισμα Γεωμετρίας είναι: $\bar{y} = 12$. Με τη βοήθεια μιας ευθείας ελαχίστων τετραγώνων παρατηρήθηκε ότι για κάθε αύξηση στο βαθμό της Αλγεβρας κατά 1 μονάδα έχουμε 1,4 μονάδες αύξηση στο βαθμό της Γεωμετρίας. Τι βαθμό αναμένεται να γράψει στη Γεωμετρία ένας μαθητής που έγραψε 11 στην Αλγεβρα;

21. Εστω οι βαθμοί 4 φοιτητών σε δυο μαθήματα όπως φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

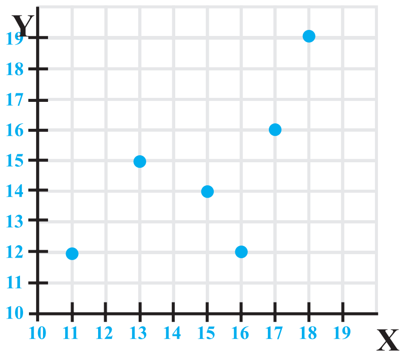
Μάθημα Α	4	6	7	8
Μάθημα Β	5	8	6	6

α) Να βρεθεί η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων που εκτιμά το βαθμό του μαθήματος Β πάνω στο βαθμό του Α.

β) Υπολογίστε τι βαθμό αναμένεται να πάρει στο μάθημα Β ένας φοιτητής που στο μάθημα Α πήρε 5. Μπορούμε με την ίδια ευθεία να εκτιμήσουμε τι βαθμό αναμένεται να πάρει στο μάθημα Α ένας φοιτητής που στο μάθημα Β πήρε 7;

γ) Ενας φοιτητής έγραψε στο μάθημα Α βαθμό ίσο με το μέσο βαθμό των 4 φοιτητών. Μπορείτε να βρείτε τι βαθμό θα πάρει στο μάθημα Β χωρίς να χρησιμοποιήσετε την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων;

22. Στον παρακάτω διάγραμμα διασποράς φαίνονται οι βαθμοί των Μαθηματικών Χ και οι βαθμοί της Φυσικής Υ 6 μαθητών της Γ΄Λυκείου:



α) Να βρεθεί η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων που εκτιμά το βαθμό της Φυσικής πάνω στο βαθμό των Μαθηματικών και να την χαράξετε στο διάγραμμα διασποράς.

β) Να βρεθεί το συνολικό τετραγωνικό σφάλμα.

γ) Πως μεταβάλλεται ο βαθμός της Φυσικής όταν ο βαθμός των Μαθηματικών αυξάνεται κατα 2 μονάδες ;

δ) Σε ένα άλλο σχολείο για τα δυο μαθήματα ισχύουν τα εξής:

ι) η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων που εκτιμά το βαθμό της Φυσικής πάνω στο βαθμό των Μαθηματικών είναι παράλληλη στην πρώτη.

ιι) Ενας μαθητής που έγραψε 14 στα Μαθηματικά εκτιμήθηκε ότι στη Φυσική θα γράψει 17. Τι βαθμό θα πάρει στη Φυσική ένας μαθητής που έγραψε 11 στα Μαθηματικά;

23. Η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων της Υ πάνω στη Χ έχει εξίσωση: $\hat{y} = \frac{7}{11} \cdot x + \frac{6}{11}$

και η αντίστοιχη της Χ πάνω στην Υ έχει εξίσωση: $\hat{x} = \frac{3}{2} \cdot y - \frac{1}{2}$. Οι τιμές των Χ και Υ, βάσει των οποίων προέκυψαν οι παραπάνω ευθείες, δίνονται στον πίνακα:

Χ	1	3	4	6	8	κ	11	14
Υ	1	2	4	4	5	λ	8	9

α) Να βρεθούν οι τιμές $\bar{x}, \bar{y}$.   β) Να βρεθούν οι τιμές των κ, λ.

2.5 Γραμμική Συσχέτιση

Απαραίτητες γνώσεις Θεωρίας

Θεωρία 1.

α) Τι είναι η γραμμική συσχέτιση;
β) Τι εκφράζει ο συντελεστής συσχέτισης του Pearson;

Απάντηση:

α) Η γραμμική συσχέτιση είναι το μέγεθος που εξετάζει κατά πόσο τα σημεία σε ένα διάγραμμα διασποράς έχουν ισχυρή γραμμική σχέση δηλαδή βρίσκονται κοντά στην ευθεία παλινδρόμησης ή έχουν ασθενή γραμμική σχέση δηλαδή βρίσκονται πιο μακριά.

β) Ο συντελεστής συσχέτισης του Pearson εκφράζει το μέτρο της γραμμικής συσχέτισης μεταξύ δυο μεταβλητών και υπολογίζεται από τον τύπο

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{\nu}(y_i-\bar{y})^2}} \quad (1)$$

Στην περίπτωση που $\bar{x}, \bar{y}$ δεν είναι ακέραιοι χρησιμοποιείται ισοδύναμα ο τύπος

$$r=\frac{\nu\sum_{i=1}^{\nu}x_iy_i-\left(\sum_{i=1}^{\nu}x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{\nu}y_i\right)}{\sqrt{\nu\sum_{i=1}^{\nu}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{\nu}x_i\right)^2}\sqrt{\nu\sum_{i=1}^{\nu}y_i^2-\left(\sum_{i=1}^{\nu}y_i\right)^2}} \quad (2)$$

Ο συντελεστής συσχέτισης Pearson είναι καθαρός αριθμός και ισχύει:

$$-1\le r\le 1$$

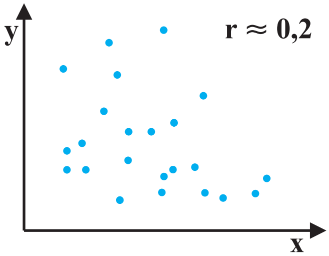
Θεωρία 2.

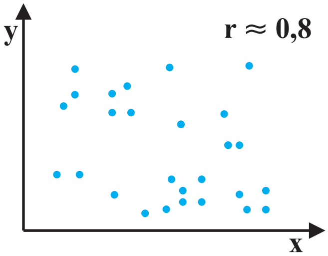
Εξετάστε το είδος της γραμμικής συσχέτισης για τις διάφορες τιμές του r.

Απάντηση:

Εχουμε τις περιπτώσεις:

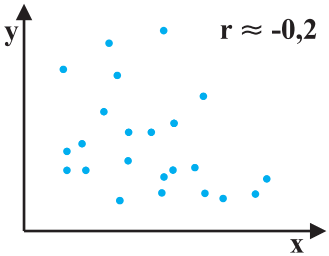
α) $0 < r < 1$, τότε: X,Y είναι θετικά γραμμικά συσχετισμένες.

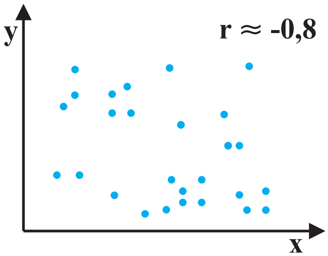




Η θετική γραμμική συσχέτιση γίνεται ισχυρότερη όσο το r πλησιάζει την τιμή 1.

β) $-1 < r < 0$ τότε X,Y είναι αρνητικά γραμμικά συσχετισμένες.



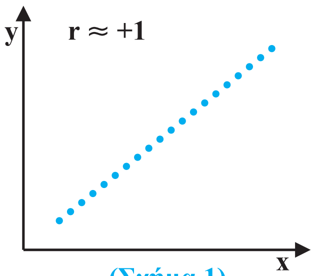


Η αρνητική γραμμική συσχέτιση γίνεται ισχυρότερη όσο το r πλησιάζει την τιμή -1.

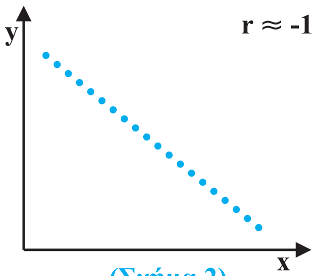
γ) $r = 1$ τότε X,Y είναι τέλεια θετικά γραμμικά συσχετισμένες. **(Σχήμα 1)**

δ) $r = -1$ τότε X,Y είναι τέλεια αρνητικά γραμμικά συσχετισμένες. **(Σχήμα 2)**

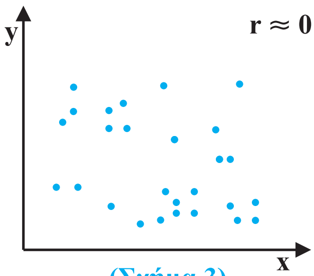
ε) $r = 0$ τότε δεν υπάρχει γραμμική συσχέτιση. **(Σχήμα 3)**



(Σχήμα 1)



(Σχήμα 2)



(Σχήμα 3)

Λυμένες Ασκήσεις.

1. **Η επίδοση 8 φοιτητών σε δυο γραπτές εξετάσεις για το ίδιο μάθημα δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:**

1η Εξέταση:	4,5	4,5	5	6	6	6	7,5	8
2η Εξέταση:	3	3	5,5	5	4,5	6	7	6

Να βρείτε το συντελεστή γραμμικής συσχέτισης για τους δύο βαθμούς και να τον ερμηνεύσετε.

Λύση:

Συμπληρώνουμε τον πίνακα:

x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	y_i^2
4,5	3	13,5	20,25	9
4,5	3	13,5	20,25	9
5	5,5	27,5	25	30,25
6	5	30	36	25
6	4,5	27	36	20,25
6	6	36	36	36
7,5	7	52,5	56,25	49
8	6	48	64	36
$\sum_{i=1}^{8} x_i = 47{,}5$	$\sum_{i=1}^{8} y_i = 40$	$\sum_{i=1}^{8} x_i y_i = 248$	$\sum_{i=1}^{8} x_i^2 = 293{,}75$	$\sum_{i=1}^{8} y_i^2 = 214{,}5$

Ο συντελεστής συσχέτισης του Pearson είναι:

$$r = \frac{8\sum_{i=1}^{8} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{8} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{8} y_i\right)}{\sqrt{8\sum_{i=1}^{8} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{8} x_i\right)^2}\sqrt{8\sum_{i=1}^{8} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{8} y_i\right)^2}} = \frac{8\cdot 248 - 47{,}5\cdot 40}{\sqrt{8\cdot 293{,}75 - 47{,}5^2}\sqrt{8\cdot 214{,}5 - 40^2}} =$$

$$= \frac{1984 - 1900}{\sqrt{2350 - 2256{,}25}\sqrt{1716 - 1600}} = \frac{84}{\sqrt{93{,}75}\sqrt{116}} = \frac{84}{9{,}68\cdot 10{,}77} \approx \frac{84}{104{,}28} \approx 0{,}8$$

Η τιμή του συντελεστή φανερώνει έντονη θετική γραμμική συσχέτιση.

Ερωτήσεις Σωστό – Λάθος.

1. Η συσχέτιση είναι διαδικασία μελέτης πληθυσμού με μια μεταβλητή. ( )

2. Ο συντελεστής συσχέτισης του Pearson είναι η κλίση της ευθείας παλινδρόμησης των μεταβλητών X, Y σε ένα διάγραμμα διασποράς. ( )

3. Ο συντελεστής συσχέτισης του Pearson δείχνει το βαθμό της συγκέντρωσης των σημείων σε ένα διάγραμμα διασποράς γύρω από την ευθεία παλινδρόμησης. ( )

4. Ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης r είναι καθαρός αριθμός. ( )

5. Αν r είναι ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης δύο μεταβλητών X και Y ισχύει πάντοτε ότι: $-1 \leq r \leq +1$. ( )

6. Ισχύει: $r = \dfrac{\sum_{i=1}^{\nu}(x_i - \bar{x})\sum_{i=1}^{\nu}(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{\nu}(x_i - \bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{\nu}(y_i - \bar{y})^2}}$ ( )

7. Αν ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης r τείνει στο 1, τότε οι μεταβλητές X και Y έχουν όλο και ισχυρότερη γραμμική συσχέτιση. ( )

8. Αν ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης r τείνει στο -1, τότε οι μεταβλητές X και Y έχουν όλο και ασθενέστερη γραμμική συσχέτιση. ( )

9. Αν για το συντελεστή γραμμικής συσχέτισης r ισχύει $r = +1$, τότε οι μεταβλητές X και Y είναι θετικά τέλεια γραμμικά συσχετισμένες. ( )

10. Αν για το συντελεστή γραμμικής συσχέτισης r ισχύει $r = 0$, τότε οι μεταβλητές X και Y είναι γραμμικά ασυσχέτιστες. ( )

Ερωτήσεις Πολλαπλής Επιλογής.

1. Ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης, μας δείχνει :

α) Τη γωνία μεταξύ δύο ευθειών παλινδρόμησης.

β) Τη μεγαλύτερη απόσταση μεταξύ δύο σημείων στο διάγραμμα διασποράς.

γ) Το βαθμό συγκέντρωσης των σημείων του διαγράμματος διασποράς γύρω από την ευθεία παλινδρόμησης.

δ) Ολα τα παραπάνω.

ε) Τίποτε από τα παραπάνω.

2. Για τον συντελεστή γραμμικής συσχέτισης r ισχύει:

α) $-1<r<1$ β) $|r|\leq 1$ γ) $0<r<1$ δ) $-1<r<0$ ε) $0<r<1$

3. Αν r είναι ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης δύο ασυσχέτιστων μεταβλητών X, Y τότε ισχύει πάντοτε:

α) $r=0$ β) $r=1$ γ) $r=-1$ δ) $-1<r<0$ ε) $0<r<1$

4. Ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης δύο μεταβλητών X, Y δίνεται από τον τύπο

α) $$r=\frac{\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\bar{x})\sum_{i=1}^{\nu}(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{\nu}(y_i-\bar{y})^2}}$$

β) $$r=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\bar{x})\sum_{i=1}^{\nu}(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\bar{x})^2\sum_{i=1}^{\nu}(y_i-\bar{y})^2}}$$

γ) $$r=\frac{\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\bar{x})^2(y_i-\bar{y})^2}{\sqrt{\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{\nu}(y_i-\bar{y})^2}}$$

δ) $$r=\frac{\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\bar{x})^2\sum_{i=1}^{\nu}(y_i-\bar{y})^2}}$$

ε) κανένα από τα παραπάνω

5. Έστω οι μεταβλητές X: ύψος και Y: βαθμός σε τέστ μαθηματικών ενός δείγματος μαθητών. Οι μεταβλητές αυτές είναι:

α) αρνητικά γραμμικά συσχετισμένες.

β) θετικά γραμμικά συσχετισμένες.

γ) ασυσχέτιστες.

δ) τέλεια θετικά γραμμικά συσχετισμένες.

ε) τίποτε από τα προηγούμενα.

6. Έστω οι μεταβλητές X: ηλικία και Y: βάρος ενός δείγματος ατόμων. Οι μεταβλητές αυτές είναι:

α) αρνητικά γραμμικά συσχετισμένες.

β) θετικά γραμμικά συσχετισμένες.

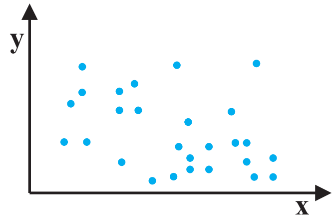
γ) ασυσχέτιστες. δ) τέλεια θετικά γραμμικά συσχετισμένες.
ε) τίποτε από τα προηγούμενα.

7. Έστω οι μεταβλητές Χ: όγκος καταναλωθέντος πετρελαίου σε lt. και Υ: ώρες λειτουργίας ενός λέβητα κεντρικής θέρμανσης . Οι μεταβλητές αυτές είναι:
α) τέλεια θετικά γραμμικά συσχετισμένες. β) αρνητικά γραμμικά συσχετισμένες.
γ) ασυσχέτιστες. δ) θετικά γραμμικά συσχετισμένες.
ε) τέλεια αρνητικά γραμμικά συσχετισμένες.

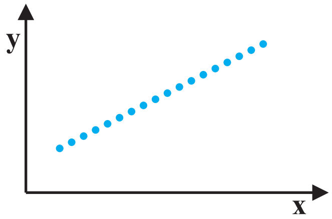
8. Αν ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης δύο μεταβλητών Χ, Υ, είναι $|r| = 1$ τότε:
α) δεν μπορούμε να αποφανθούμε για την γραμμική συσχέτιση των Χ, Υ.
β) έχουμε τέλεια θετική γραμμική συσχέτιση.
γ) έχουμε τέλεια αρνητική γραμμική συσχέτιση.
δ) έχουμε το (β) ή το (γ)
ε) δεν έχουμε γραμμική συσχέτιση.

9. Αν r είναι ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης δύο μεταβλητών Χ, Υ και $-1 < r < 0$, τότε:
α) οι Χ, Υ είναι θετικά γραμμικά συσχετισμένες.
β) οι Χ, Υ είναι αρνητικά γραμμικά συσχετισμένες.
γ) έχουμε τέλεια θετική γραμμική συσχέτιση.
δ) έχουμε τέλεια αρνητική γραμμική συσχέτιση.
ε) δεν έχουμε γραμμική συσχέτιση.

10. Στο διπλανό σχήμα έχουμε το διάγραμμα διασποράς δύο μεταβλητών Χ και Υ. Στην περίπτωση αυτή:
α) οι Χ, Υ είναι θετικά γρ. συσχετισμένες.
β) οι Χ,Υ είναι αρνητικά γρ. συσχετισμένες.
γ) έχουμε τέλεια θετική γρ. συσχέτιση.
δ) έχουμε τέλεια αρνητική γρ. συσχέτιση.
ε) δεν έχουμε γρ. συσχέτιση



11. **Στο διπλανό σχήμα έχουμε το διάγραμμα διασποράς δύο μεταβλητών X και Y. Στην περίπτωση αυτή:**



α) οι X, Y είναι θετικά γραμμικά συσχετισμένες.
β) οι X, Y είναι αρνητικά γραμμικά συσχετισμένες.
γ) έχουμε τέλεια θετική γραμμική συσχέτιση.
δ) έχουμε τέλεια αρνητική γραμμική συσχέτιση.
ε) δεν έχουμε γραμμική συσχέτιση.

Ασκήσεις.

1. **Να υπολογιστεί ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης για τις μεταβλητές του παρακάτω πίνακα:**

X	1	2	3	4	5	6	7	8
Y	30	24	20	18	14	11	8	3

2. **Να υπολογιστουν οι τιμές της μεταβλητής Y ώστε ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης για τις μεταβλητές του παρακάτω πίνακα να ισούται με 1:**

X	1	2	3	5	7	8	9	11
Y	3	6						

Εκτιμήστε την τιμή της Y για: x = 10.

3. **Η επίδοση 11 φοιτητών σε δυο γραπτές εξετάσεις για το ίδιο μάθημα δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:**

X 1η εξέταση:	4	4,5	5	5,5	6	7	7,5	8	8,5	9	10
Y 2η εξέταση:	4	3	5,5	5	5	6	7,5	6	8	7	8

Να βρείτε το συντελεστή γραμμικής συσχέτισης για τους δύο βαθμούς και να τον ερμηνεύσετε.

4. **Να βρείτε το συντελεστή γραμμικής συσχέτισης για τις μεταβλητές του παρακάτω πίνακα και να τον ερμηνεύσετε.**

X	1	2	3	4	5	6	7	8
Y	5	10	15	20	25	30	35	40

5. Να βρείτε το συντελεστή γραμμικής συσχέτισης για τις μεταβλητές του παρακάτω πίνακα και να τον ερμηνεύσετε.

X	1	2	3	4	5	6	7	8
Y	5	10	15	20	25	30	35	40

6. Να βρείτε το συντελεστή γραμμικής συσχέτισης για τις μεταβλητές του παρακάτω πίνακα και να τον ερμηνεύσετε.

X	1	2	3	4	5	6	7	8
Y	30	26	22	18	14	10	6	2

7. Να υπολογιστεί ο συντελεστής συσχέτισης για έξι ζεύγη παρατηρήσεων για τα οποία ισχύει:

$$\bar{x} = 35, \quad \bar{y} = \frac{13}{3}, \sum_{i=1}^{6} x_i^2 = 9100, \quad \sum_{i=1}^{6} y_i^2 = 136, \quad \sum_{i=1}^{6} x_i y_i = 720$$

8. Για οκτώ ζεύγη παρατηρήσεων (x,y) έχουμε:

$$\sum_{i=1}^{8} x_i = 56, \quad \sum_{i=1}^{8} y_i = 40, \quad \sum_{i=1}^{8} x_i y_i = 364, \quad \sum_{i=1}^{8} x_i^2 = 524, \quad \sum_{i=1}^{8} y_i^2 = 256.$$

α) Να υπολογίσετε το συντελεστή γραμμικής συσχέτισης.
β) Να ερμηνεύσετε το συντελεστή γραμμικής συσχέτισης.

9. Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι θερμοκρασίες σε C° δυο εξαρτημάτων Α, Β μιας μηχανής που ελέγχονται κάθε μια ώρα από την έναρξη λειτουργίας.

Ώρα:	08:00	09:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00	16:00
X Εξάρτ. Α:	45	51	54	57	58	59	62	67	70
Y Εξάρτ. Β:	32	40	35	41	48	50	50	55	51

α) Να υπολογίσετε το συντελεστή γραμμικής συσχέτισης.
β) Να ερμηνεύσετε το συντελεστή γραμμικής συσχέτισης.

10. α) Να υπολογίσετε το συντελεστή γραμμικής συσχέτισης μεταξύ των τιμών x και y του διπλανού πίνακα:

X	1	2	3	4	5	6
Y	6	9	10	11	17	20

β) Εστω οι τιμές: $x_i' = 3x_i - 1$ και $y_i' = 2y_i + 2$.
Υπολογίστε το συντελεστή γραμμικής συσχέτισης μεταξύ των τιμών X΄,Y΄.

γ) Να συγκρίνετε τα δύο αποτελέσματα.

11. Να αποδείξετε το διπλανό τύπο.

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i y_i - \nu\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \nu\bar{x}^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{\nu} y_i^2 - \nu\bar{y}^2}}$$

12. α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
1	3					
2	7					
3	9					
4	11					
5	11					
6	15					
7	21					

β) Να υπολογίσετε το συντελεστή γραμμικής συσχέτισης.

13. Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι ηλικίες (σε έτη) και οι (συστολικές) πιέσεις αίματος 10 γυναικών (σε ακέραια προσέγγιση cm Hg).

Ηλικία (x)	56	42	72	36	63	47	55	49	38	60
Πίεση (y)	17	12	14	10	13	09	11	08	11	15

α) Να βρείτε το συντελεστή γραμμικής συσχέτισης μεταξύ των x και y.

β) Να βρείτε την ευθεία παλινδρόμησης ελαχίστων τετραγώνων της y πάνω στη x.

γ) Εκτιμήστε την πίεση μιας γυναίκας ηλικίας 45 ετών.

14. Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι βαθμοί 6 φοιτητών σε δύο εξετάσεις ενός μαθήματος.

1η εξέταση x_i	2η εξέταση y_i	x_i^2	$x_i y_i$	y_i^2
5	4			
6	6			
8	5			
9	5			
10	8			
$\sum_{i=1}^{5} x_i =$	$\sum_{i=1}^{5} y_i =$	$\sum_{i=1}^{5} x_i^2 =$	$\sum_{i=1}^{5} x_i y_i =$	$\sum_{i=1}^{5} y_i^2 =$

α) Να συμπληρώστε τον πίνακα.

β) Να υπολογίσετε και να ερμηνεύσετε το συντελεστή γραμμικής συσχέτισης.



3ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

3.0 Βασικές Έννοιες από τη Θεωρία Συνόλων

Απαραίτητες γνώσεις Θεωρίας

Θεωρία 1.

α) Τι είναι σύνολο και πώς συμβολίζεται;
β) Πώς παρουσιάζουμε ένα σύνολο;
γ) Πότε δυο σύνολα είναι ίσα και ποιες είναι οι ιδιότητες της ισότητας συνόλων;

Απάντηση:

α) Ο ορισμός του συνόλου δεν υπάρχει. Η έννοια του συνόλου είναι, όπως οι έννοιες του σημείου και της ευθείας, πρωταρχική έννοια.

Πρωταρχικές έννοιες ονομάζονται εκείνες που δε μπορούμε ή δε θέλουμε να τις ορίσουμε με άλλες απλούστερες έννοιες.

Μπορούμε να αντιλαμβανόμαστε όμως το σύνολο **«ως συλλογή αντικειμένων καλά ορισμένων και διακριτών μεταξύ τους».**

Στοιχεία συνόλου ονομάζουμε όλα τα «καλά ορισμένα» και «διακριτά μεταξύ τους» αντικείμενα που παίρνουν μέρος στη «συλλογή».

Ο συμβολισμός ενός συνόλου γίνεται με ένα οποιοδήποτε κεφαλαίο γράμμα του ελληνικού ή του λατινικού αλφάβητου, π.χ. Α, Β, Γ, Ω κ.λπ.

Αν το α είναι στοιχείο του συνόλου Α γράφουμε $\alpha \in A$ και διαβάζουμε «α ανήκει στο Α».

Αν το x δεν είναι στοιχείο του συνόλου Α γράφουμε $x \notin A$ και διαβάζουμε «x δεν ανήκει στο Α».

β) Η παρουσίαση ενός συνόλου γίνεται:

1. Με δύο άγκιστρα και μέσα σ' αυτά γράφουμε ένα προς ένα όλα τα στοιχεία του συνόλου διαχωρίζοντάς τα με ένα κόμμα (**αναγραφή των στοιχείων του συνόλου**).

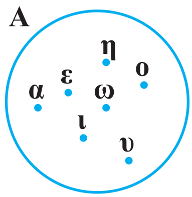
Παράδειγμα: $A = \{\alpha, \varepsilon, \iota, \eta, \upsilon, o, \omega\}$ $B = \{+, -, \cdot, :\}$ $\Gamma = \{-1, 1\}$

2. Με δύο άγκιστρα και μέσα σ' αυτά γράφουμε την χαρακτηριστική ιδιότητα που έχουν τα στοιχεία του συνόλου (**περιγραφή των στοιχείων του συνόλου**).

Παράδειγμα:
Α = {τα φωνήεντα του ελληνικού αλφάβητου}
Β = {τα σύμβολα των τεσσάρων πράξεων της αριθμητικής}
Γ = {$x \in R$: $x^2 = 1$}

3. Με μία «κλειστή καμπύλη γραμμή» μέσα στην οποία τοποθετούμε τα στοιχεία του συνόλου τα οποία απεικονίζονται σε ένα συγκεκριμένο σημείο του επιπέδου της γραμμής **(γεωμετρική περιγραφή του συνόλου - διάγραμμα του Venn)**.

Παράδειγμα:



γ) Ίσα λέγονται δύο σύνολα όταν έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία. Αν Α, Β ίσα σύνολα τότε συμβολίζουμε Α = Β.

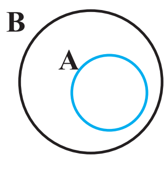
Οι ιδιότητες της ισότητας δύο συνόλων είναι:
I) **Α = Α (αυτοπαθής)**
II) **Αν Α = Β τότε Β = Α (συμμετρική)**
III) **Αν Α = Β και Β = Γ τότε Α = Γ (μεταβατική)**

Θεωρία 2.

α) Τι λέμε υποσύνολο και τί ιδιότητες έχει;
β) Τι λέμε γνήσιο υποσύνολο;

Απάντηση:

α) Το σύνολο Α ονομάζεται υποσύνολο του συνόλου Β όταν κάθε στοιχείο του συνόλου Α είναι και στοιχείο του συνόλου Β. Αν σύνολο Α είναι υποσύνολο του συνόλου Β τότε συμβολίζουμε: $A \subseteq B$. Αν $A \subseteq B$ λέμε και ότι το Α περιέχεται στο Β.
Αν $A \subseteq B$ γεωμετρικά το παρουσιάζουμε:



Οι ιδιότητες των υποσυνόλων είναι:
I) $A \subseteq A$ για κάθε σύνολο Α (αυτοπαθής)
II) Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq \Gamma$ τότε: $A \subseteq \Gamma$ (μεταβατική)
III) Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$ τότε: $A = B$ (και αντίστροφα)

β) Το σύνολο Α ονομάζεται **γνήσιο υποσύνολο** του συνόλου Β όταν κάθε στοιχείο του συνόλου Α είναι και στοιχείο του συνόλου Β και υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του Β που δεν είναι στοιχείο του Α. Αν Α γνήσιο υποσύνολο του Β συμβολίζουμε: $A \subset B$.

Παρατηρήσεις:
Προφανώς
Αν $A \subseteq B$ τότε: $A \subset B$ ή $A = B$.
και
Αν $A \subset B$ τότε: $A \neq B$

Θεωρία 2.

α) Τι ονομάζουμε βασικό και τι κενό σύνολο; Πως συμβολίζονται:
β) Πότε δυο σύνολα λέγονται ισοδύναμα; Τι ονομάζουμε πεπερασμένο σύνολο;

Απάντηση:

α) Βασικό σύνολο (ή σύνολο αναφοράς) ονομάζουμε το σύνολο του οποίου τα υποσύνολα χρησιμοποιούμε στην επεξεργασία ενός θέματος.

Παράδειγμα:
Στη μελέτη των πεδίων ορισμού των συναρτήσεων που διδασκόμαστε στο Γυμνάσιο και Λύκειο βασικό σύνολο είναι το R.

Το βασικό σύνολο συμβολίζεται με το γράμμα Ω. Το βασικό σύνολο Ω το παρουσιάζουμε γεωμετρικά ως το σύνολο των εσωτερικών σημείων ορθογωνίου παραλληλογράμμου:



Κενό ονομάζουμε το σύνολο που δεν περιέχει κανένα στοιχείο. Το κενό σύνολο το συμβολίζουμε: $\varnothing$.

Παρατήρηση:
Φυσικά $\varnothing \subseteq A$, για κάθε σύνολο Α.

β) Ισοδύναμα ονομάζονται δύο σύνολα Α, Β αν σε κάθε στοιχείο του Α μπορούμε να αντιστοιχίσουμε μόνο ένα στοιχείο του Β και αντίστροφα. Αν Α ισοδύναμο με το Β συμβολίζουμε $A \sim B$.

Παράδειγμα:

$A = \{\alpha, \varepsilon, \iota, \eta, \upsilon, o, \omega\} \sim B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$
$A = \{1, 2, 3, 4, ..., \nu, ...\} \sim B = \{3, 4, 5, 6, ... \nu + 2, ...\}$

Πεπερασμένο ονομάζεται ένα σύνολο όταν είναι το κενό ή όταν είναι ισοδύναμο με ένα υποσύνολο των θετικών ακεραίων $T_\nu = \{1, 2, 3, ..., \nu\}$

Παράδειγμα 5:

Α = {α, ε, ι, η, υ, ο, ω} ~ T_7 = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} **Β = {+, -, · , :} ~ T_4 = {1, 2, 3, 4}**

Γ = {1, -1} ~ T_2 = {1, 2}

Το πλήθος των στοιχείων ενός πεπερασμένου συνόλου Α ονομάζεται πληθάριθμος ή πληθικός αριθμός και συμβολίζεται με Ν(Α).

Προφανώς:

I) **$N(A) \geq 0$ για κάθε σύνολο Α.**

II) **$N(\varnothing) = 0$.**

III) **Αν $A \subseteq B$ τότε $N(A) \leq N(B)$** Το αντίστροφο δεν ισχύει.

IV) **Αν $A \subset B$ τότε $N(A) < N(B)$** Το αντίστροφο δεν ισχύει.

V) **Αν $A = B$ τότε $N(A) = N(B)$** Το αντίστροφο δεν ισχύει.

VI) **Αν $N(A) = 0$ τότε $A = \varnothing$ και** ισχύει και το αντίστροφο.

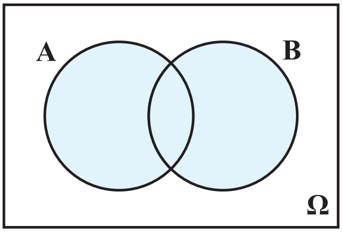
Θεωρία 2.

Να αναφερθούν οι πράξεις μεταξύ συνόλων και οι ιδιότητές τους. Επίσης να δοθεί ο ορισμός του συμπληρωματικού ενός συνόλου και οι ιδιότητές του.

Απάντηση:

1. Ένωση $A \cup B$

Ένωση δύο συνόλων Α και Β ονομάζουμε το σύνολο που αποτελείται από τα στοιχεία που ανήκουν είτε στο Α είτε στο Β. Την ένωση δύο συνόλων Α και Β συμβολίζουμε: $A \cup B$.



Γεωμετρικά την ένωση δύο συνόλων Α και Β την παριστάνουμε με τον γραμμοσκιασμένο χώρο του διπλανού διαγράμματος του Venn.

Ιδιότητες της ένωσης:

I) $A \cup B = B \cup A$

II) $A \cup (B \cup \Gamma) = (A \cup B) \cup \Gamma$

III) $A \cup \Omega = \Omega$

IV) $A \cup \varnothing = A$

V) **$A \subseteq B$ τότε $A \cup B = B$** και αντίστροφα

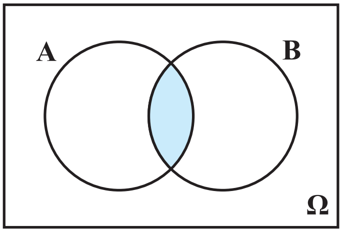
VI) **$A \subseteq A \cup B$ και $B \subseteq A \cup B$**

VII) **Αν $A = B$ τότε $A \cup \Gamma = B \cup \Gamma$** όχι όμως και αντίστροφα.

2. Τομή $A \cap B$

Τομή δύο συνόλων Α και Β ονομάζουμε το σύνολο που αποτελείται **από τα κοινά στοιχεία των Α και Β**. Την τομή δύο συνόλων Α και Β συμβολίζουμε: $A \cap B$.

Γεωμετρικά την τομή δύο συνόλων Α και Β την παριστάνουμε με τον γραμμοσκιασμένο χώρο του διπλανού διαγράμματος του Venn.



Ιδιότητες της τομής:

I) $A \cap B = B \cap A$

II) $A \cap (B \cap \Gamma) = (A \cap B) \cap \Gamma$

III) $A \cap \Omega = A$

IV) $A \cap \varnothing = \varnothing$

V) $A \subseteq B$ **τότε** $A \cap B = A$ **και αντίστροφα**

VI) $A \cap B \subseteq A$ **και** $A \cap B \subseteq B$ **και** $A \cap B \subseteq A \cup B$

VII) $A = B$ **τότε** $A \cap \Gamma = B \cap \Gamma$ **όχι όμως και αντίστροφα.**

Παρατήρηση:
Δύο σύνολα Α και Β δεν είναι απαραίτητο να έχουν πάντα κοινά στοιχεία. Όταν δύο σύνολα Α και Β δεν έχουν κοινά στοιχεία ονομάζονται ξένα μεταξύ τους, τότε γράφουμε:

$$A \cap B = \varnothing$$

Επιμεριστικές ιδιότητες:

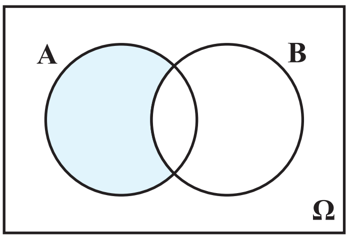
α) Της τομής ως προς την ένωση $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$

β) Της ένωσης ως προς την τομή $A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$

3. Διαφορά $A - B$

Διαφορά δύο συνόλων Α και Β ονομάζουμε το σύνολο όλων των στοιχείων του Α που δεν είναι και στοιχεία του Β. Τη διαφορά των συνόλων Α και Β συμβολίζουμε: $A - B$.

Γεωμετρικά τη διαφορά δύο συνόλων Α και Β την παρουσιάζουμε με τον γραμμοσκιασμένο χώρο του διπλανού διαγράμματος του Venn.



Ιδιότητες της διαφοράς:

I) $A - B \subseteq A$

II) $A - B = A - (A \cap B)$

III) $A - B = (A \cup B) - B$

IV) $(A - B) \cup A = A$

V) $(A - B) \cap A = A - B$

VI) $(A - B) \cup B = A \cup B$

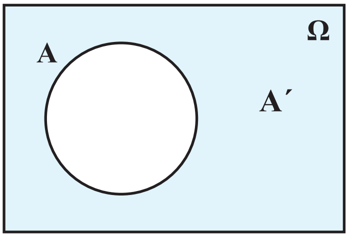
VII) $(A - B) \cap B = \varnothing$

VIII) $A \subseteq B$ **τότε** $A - B = \varnothing$ **και αντίστροφα**

Παρατήρηση:

- **Αν** $A \cap B = \varnothing$ **τότε:**
  $A - B = \varnothing$ **και** $B - A = \varnothing$
- **Αν** $A \cap B \neq \varnothing$ **τότε:**
  $A - B \neq \varnothing$ **και** $B - A \neq \varnothing$

Συμπλήρωμα (ή συμπληρωματικό) ενός συνόλου Α ως προς το βασικό σύνολο Ω ονομάζουμε το σύνολο των στοιχείων του Ω που δεν είναι στοιχεία του Α. Το συμπλήρωμα ενός συνόλου Α το συμβολίζουμε: Α΄.



Γεωμετρικά το συμπλήρωμα ενός συνόλου Α το παρουσιάζουμε με το γραμμοσκιασμένο χώρο του διπλανού διαγράμματος του Venn.

Ιδιότητες του συμπληρώματος:

I) $A \cap A' = \varnothing$

II) $A \cup A' = \Omega$

III) $(A')' = A$

IV) $\Omega' = \varnothing$

V) $\varnothing' = \Omega$

VI) $A \cap B' = A - B$

VII) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ } **Νόμοι του De Morgan**

VIII) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ }

IX) $A \subseteq B$ **τότε** $B' \subseteq A'$ **και αντίστροφα**

3.1 Δειγματικός Χώρος. Ενδεχόμενα.

Απαραίτητες γνώσεις Θεωρίας

Θεωρία 1.

α) Τι ονομάζουμε πείραμα τύχης;
β) Τι ονομάζουμε δειγματικό χώρο ενός πειράματος τύχης;

Απάντηση:

α) Πείραμα τύχης ονομάζουμε κάθε διαδικασία που εκτελείται πολλές φορές κάτω από τις ίδιες (φαινομενικά τουλάχιστον) συνθήκες, το αποτέλεσμα της οποίας δε μπορούμε να προβλέψουμε.

β) Δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης ονομάζεται το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων (ή δυνατών περιπτώσεων) του πειράματος και συμβολίζεται με το γράμμα Ω.

ΣΧΟΛΙΑ:

1. Ο δειγματικός χώρος Ω κατασκευάζεται λοιπόν με δύο βασικές ιδιότητες:

1η ιδιότητα:
Κάθε στοιχείο του Ω είναι ένα από τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος τύχης.

2η ιδιότητα:
Κάθε επανάληψη του πειράματος έχει σαν αποτέλεσμα, ένα και μοναδικό στοιχείο του συνόλου Ω.

2. Υπάρχουν δειγματικοί χώροι με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων και δειγματικοί χώροι με άπειρο πλήθος στοιχείων (ανάλογα με τις συνθήκες του πειράματος).

Παράδειγμα:

Πείραμα Ι:
Ρίχνουμε ένα νόμισμα ενός € δύο φορές και καταγράφουμε το αποτέλεσμα «κουκουβάγια» - Κ ή «Ευρ. Ένωση» Ε.

Τότε Ω = {ΚΚ, ΚΕ, ΕΚ, ΕΕ}

Πείραμα ΙΙ:
Ρίχνουμε ένα νόμισμα ενός € μέχρι να φέρει «Ε».

Τότε Ω = {Ε, ΚΕ, ΚΚΕ, ΚΚΚΕ, ...}

(Στην «πράξη» όλοι είμαστε βέβαιοι ότι θα εμφανιστεί σε κάποια ρίψη η όψη «Ε» όμως είναι λογικό να δεχτούμε «θεωρητικά» ότι μπορούμε να μην έχουμε πεπερασμένο αριθμό ρίψεων με την ένδειξη «Ε»).
Στο παρόν βιβλίο θα μας απασχολήσουν μόνο πεπερασμένου πλήθους δειγματικοί χώροι.

Θεωρία 2.

α) Τι ονομάζουμε ενδεχόμενο ή γεγονός;
β) Τι ονομάζουμε απλό ενδεχόμενο και τι σύνθετο ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης;

Απάντηση:

α) Ενδεχόμενο ή γεγονός ονομάζουμε οποιοδήποτε υποσύνολο του δειγματικού χώρου Ω.

β) Απλό ενδεχόμενο ονομάζουμε οποιοδήποτε υποσύνολο του Ω με ένα ακριβώς στοιχείο.
Σύνθετο ενδεχόμενο ονομάζουμε οποιοδήποτε υποσύνολο του Ω με περισσότερα του ενός στοιχεία.

Παράδειγμα:
Στο πείραμα ρίψης ενός αμερόληπτου κύβου (ζάρι) έχουμε:
Απλό ενδεχόμενο $A = \{3\}$ **Σύνθετο ενδεχόμενο $B = \{2, 4, 6\}$**

Θεωρία 3.

α) Τι ονομάζουμε βέβαιο και τι αδύνατο ενδεχόμενο;
β) Πότε λέμε ότι πραγματοποιείται ή συμβαίνει ένα ενδεχόμενο Α;
γ) Τι ονομάζουμε ευνοϊκές περιπτώσεις ενός ενδεχομένου Α;

Απάντηση:

α) Βέβαιο ενδεχόμενο ονομάζουμε τον ίδιο τον δειγματικό χώρο Ω (προφανώς $\Omega \subseteq \Omega$).
Αδύνατο ενδεχόμενο ονομάζουμε το κενό (προφανώς $\varnothing \subseteq \Omega$).

β) Λέμε ότι πραγματοποιείται ή συμβαίνει ένα ενδεχόμενο Α (ενός δειγματικού χώρου Ω) όταν το αποτέλεσμα του πειράματος σε μία συγκεκριμένη εκτέλεσή του είναι στοιχείο του ενδεχομένου Α.

γ) Ευνοϊκές περιπτώσεις ενός ενδεχομένου Α ονομάζονται όλα τα στοιχεία του Α.

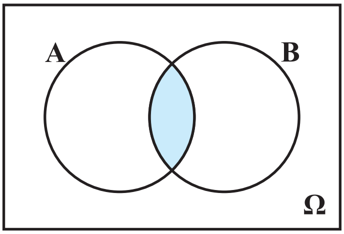
Θεωρία 4.

α) Ποιες είναι οι πράξεις με ενδεχόμενα;
β) Πότε δύο ενδεχόμενα ονομάζονται αντίθετα και πότε ασυμβίβαστα;

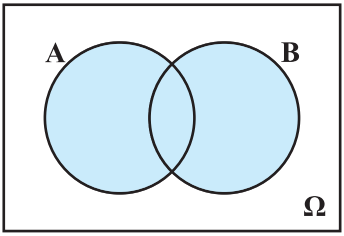
Απάντηση:

α) Οι πράξεις είναι:

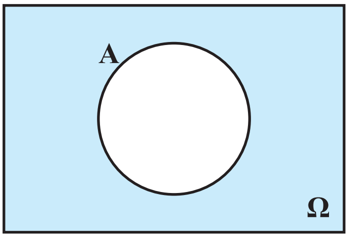
1. Το ενδεχόμενο $\mathbf{A \cap B}$ διαβάζεται: «Α τομή Β», ή «Α και Β» και πραγματοποιείται **όταν πραγματοποιούνται ταυτόχρονα τα Α και Β.**



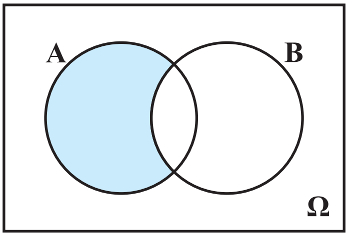
2. Το ενδεχόμενο $\mathbf{A \cup B}$ διαβάζεται: «Α ένωση Β», και πραγματοποιείται **όταν πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα Α, Β.**



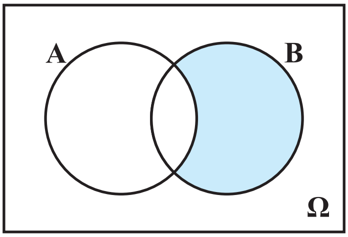
3. Το ενδεχόμενο **Α΄** διαβάζεται «όχι Α», ή «συμπληρωματικό του Α» ή «αντίθετο του Α» και πραγματοποιείται **όταν δεν πραγματοποιείται το Α.**



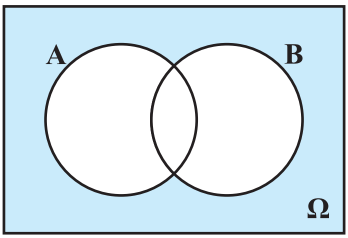
4. Το ενδεχόμενο $\mathbf{A - B = A \cap B'}$ διαβάζεται «διαφορά του Β από το Α», ή «Α και όχι Β» ή «μόνο το Α» και πραγματοποιείται **όταν πραγματοποιείται το Α και όχι το Β.**



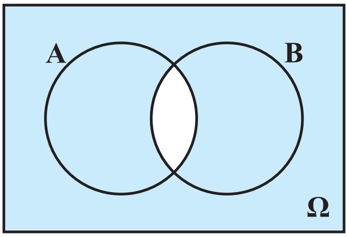
5. Το ενδεχόμενο $\mathbf{B - A = B \cap A'}$ διαβάζεται «διαφορά του Α από το Β», ή «Β και όχι Α» ή «μόνο το Β» και πραγματοποιείται **όταν πραγματοποιείται το Β και όχι το Α.**



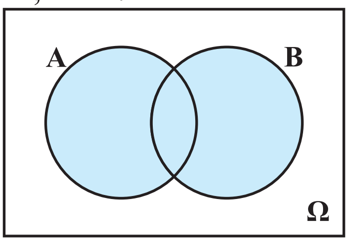
6. Το ενδεχόμενο $\mathbf{(A \cup B)' = A' \cap B'}$ διαβάζεται «όχι το Α ή Β», ή «κανένα από τα Α και Β» και πραγματοποιείται **όταν δεν πραγματοποιείται ούτε το Α ούτε το Β.**



7. Το ενδεχόμενο $(A \cap B)' = A' \cup B'$ διαβάζεται «όχι το Α ή όχι το Β» και πραγματοποιείται **όταν δεν πραγματοποιούνται τα Α και Β ταυτόχρονα.**



8. Το ενδεχόμενο:
$(A \cap B') \cup (B \cap A)' = (A - B) \cup (B - A)$
διαβάζεται «ακριβώς ένα από τα Α και Β» ή «μόνο το Α ή μόνο το Β» και πραγματοποιείται **όταν πραγματοποιείται ακριβώς ένα από τα Α - Β, Β - Α.**

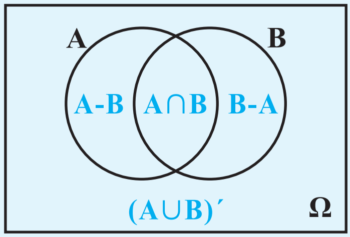


β) Δύο ενδεχόμενα Α, Β ονομάζονται **αντίθετα** όταν $A = B'$. Δύο ενδεχόμενα Α, Β του δειγματικού χώρου Ω ονομάζονται **ασυμβίβαστα** ή **ξένα** ή **αμοιβαία αποκλειόμενα** όταν $A \cap B = \varnothing$.

ΧΡΗΣΙΜΑ ΣΧΟΛΙΑ

Αν Α, Β ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω και $\alpha \in \Omega$ τότε:

1) **Υποσύνολα του Ω:**



2) Αν $\alpha \in A$ τότε $\alpha \notin A'$ και αντίστροφα.

3) Αν $\alpha \in A \cap B$ τότε $\alpha \in A$ και $\alpha \in B$ και αντίστροφα.

4) Αν $\alpha \in A \cup B$ τότε $\alpha \in A$ ή $\alpha \in B$ και αντίστροφα.

5) $A \subseteq B \Leftrightarrow$ αν για κάθε $\alpha \in A$ τότε $\alpha \in B$.

6)

Κοινή γλώσσα	Γλώσσα Συνόλων
• Το ενδεχόμενο Α πραγματοποιείται	$\alpha \in A$
• Το ενδεχόμενο Α δεν πραγματοποιείται	$\alpha \notin A \ (\Leftrightarrow \alpha \in A')$
• Τουλάχιστον ένα από τα Α, Β πραγματοποιείται	$\alpha \in A \cup B$
• Πραγματοποιούνται ταυτόχρονα και το Α και το Β	$\alpha \in A \cap B$
• Κανένα από τα Α, Β δεν πραγματοποιείται	$\alpha \in (A \cup B)'$
• Πραγματοποιείται μόνο το Α (και όχι το Β)	$\alpha \in A - B \ (\Leftrightarrow \alpha \in A \cap B')$
• Αν πραγματοποιείται το Α τότε πραγματοποιείται και το Β	$A \subseteq B$
• Ακριβώς ένα από τα Α, Β πραγματοποιείται	$\alpha \in (A \cap B') \cup (B \cap A') \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \alpha \in (A - B) \cup (B - A)$

Λυμένες Ασκήσεις.

1. Ρίχνουμε ένα νόμισμα ενός ευρώ (€) μία φορά. Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος και το πλήθος των στοιχείων του.

Λύση:

Αν χαρακτηρίσουμε την όψη του νομίσματος με την «Ευρωπαϊκή Ένωση» με το γράμμα «Ε» ενώ την όψη με την «κουκουβάγια» με το γράμμα «Κ» τότε: $\Omega = \{К, Е\}$ και $N(\Omega) = 2$.

2. Ρίχνουμε ένα νόμισμα ενός ευρώ (€) τέσσερις φορές.

α) Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος και το πλήθος των στοιχείων του.

β) Να βρεθεί το ενδεχόμενο Α: «εμφανίζεται το πολύ δύο φορές η όψη με την κουκουβάγια» και το πλήθος των στοιχείων του.

γ) Να βρεθεί το ενδεχόμενο Β: «εμφανίζεται τουλάχιστον δύο φορές η όψη με την κουκουβάγια» και το πλήθος των στοιχείων του.

δ) Να βρεθεί το ενδεχόμενο Γ: «εμφανίζεται ακριβώς δύο φορές η όψη με την κουκουβάγια» και το πλήθος των στοιχείων του και η σχέση του με τα Α και Β.

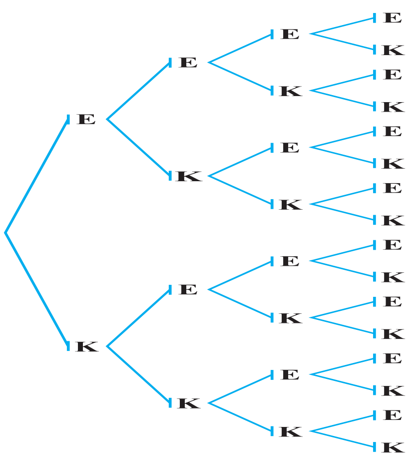
ε) Να βρεθεί το ενδεχόμενο Δ: «στη δεύτερη και τρίτη ρίψη εμφανίζεται η όψη με την κουκουβάγια» και το πλήθος των στοιχείων του.

στ) Να βρεθεί το ενδεχόμενο Ε: «στη δεύτερη και τρίτη ρίψη να μην εμφανιστεί μόνο η όψη με την κουκουβάγια» και το πλήθος των στοιχείων του.

ζ) Να εκφραστεί το Ε συναρτήσει του Δ.

Λύση:

Μερικές φορές μας είναι αναγκαίο για τον προσδιορισμό του δειγματικού χώρου ενός πειράματος τύχης να κατασκευάζουμε ένα δενδροδιάγραμμα όπως δίπλα.



α) Ω = {ΕΕΕΕ, ΕΕΕΚ, ΕΕΚΕ, ΕΕΚΚ, ΕΚΕΕ, ΕΚΕΚ, ΕΚΚΕ, ΕΚΚΚ, ΚΕΕΕ, ΚΕΕΚ, ΚΕΚΕ, ΚΕΚΚ, ΚΚΕΕ, ΚΚΕΚ, ΚΚΚΕ, ΚΚΚΚ} και N(Ω) = 16

β) Α = {ΕΕΕΕ, ΕΕΕΚ, ΕΕΚΕ, ΕΕΚΚ, ΕΚΕΕ, ΕΚΕΚ, ΕΚΚΕ, ΚΕΕΕ, ΚΕΕΚ, ΚΕΚΕ, ΚΚΕΕ}
N(A) = 11

γ) Β = {ΕΕΚΚ, ΕΚΕΚ, ΕΚΚΕ, ΕΚΚΚ, ΚΕΕΚ, ΚΕΚΕ, ΚΕΚΚ, ΚΚΕΕ, ΚΚΕΚ, ΚΚΚΕ, ΚΚΚΚ}
N(B) = 11

δ) Γ = {ΕΕΚΚ, ΕΚΕΚ, ΕΚΚΕ, ΚΕΕΚ, ΚΕΚΕ, ΚΚΕΕ} και $Γ = Α \cap Β$

ε) Δ = {ΕΚΚΕ, ΕΚΚΚ, ΚΚΚΕ, ΚΚΚΚ} και N(Δ) = 4

στ) Ε = {ΕΕΕΕ, ΕΕΕΚ, ΕΕΚΕ, ΕΕΚΚ, ΕΚΕΕ, ΕΚΕΚ, ΚΕΕΕ, ΚΕΕΚ, ΚΕΚΕ, ΚΕΚΚ, ΚΚΕΕ, ΚΚΕΚ}
N(E) = 12

ζ) Ε = Δ΄

3. Ένα ομογενές «ζάρι» με σχήμα κανονικού τετράεδρου έχει πάνω σε κάθε έδρα του τις ενδείξεις 1, 2, 3, και 4. Ρίχνουμε το ζάρι μία φορά και καταγράφουμε την ένδειξη που βρίσκεται στο επίπεδο της ρίψης (αυτή δηλαδή που δε βλέπουμε).
α) Να γραφεί ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος και να βρεθεί το πλήθος των στοιχείων του.
β) Να γραφεί το ενδεχόμενο Α: «εμφανίζεται άρτιος αριθμός» και να βρεθεί το πλήθος των στοιχείων του.
γ) Να γραφεί το αντίθετο ενδεχόμενο του Α και να βρεθεί το πλήθος των στοιχείων του.
δ) Αν Γ, Δ είναι ενδεχόμενα του Ω και N(Γ) = N(Δ) μπορούμε να πούμε με σιγουριά ότι Γ = Δ; Να δικαιολογηθεί η απάντηση.

Λύση:

α) Προφανώς Ω = {1, 2, 3, 4} και N(Ω) = 4

β) Α = {2, 4} και N(A) = 2

γ) Α΄ = {1, 3} και N(A΄) = 2

δ) Αν Γ = {1, 4} και Δ = {2, 4}, τότε N(Γ) = N(Δ) = 2, όμως $Γ \neq Δ$

4. Το ομογενές τετραεδρικό «ζάρι» του προηγούμενου πειράματος το ρίχνουμε δύο φορές.
α) Να γραφεί ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος και να βρεθεί το πλήθος των στοιχείων του.
β) Να γραφεί το ενδεχόμενο Α: «το άθροισμα των ενδείξεων και των δύο ρίψεων να είναι μικρότερο ή ίσο του 5» και να βρεθεί το πλήθος των στοιχείων του.
γ) Να γραφεί το ενδεχόμενο Β: «και οι δύο ενδείξεις είναι ίδιες» και να βρεθεί το πλήθος των στοιχείων του.

δ) Να γραφούν τα παρακάτω ενδεχόμενα και να βρεθεί το πλήθος των στοιχείων τους:
i) Γ: «το αντίθετο του Α» **ii) Δ: «το Α και όχι το Β»** **iii) Ε: «το Α ή το Β»**
iv) Ζ: «ούτε το Α ούτε το Β» **v) Η: «το Α και Β»**

Λύση:

α) Ρίχνουμε το τετραεδρικό ζάρι δύο φορές και καταγράφουμε τις ενδείξεις που παρατηρήσαμε οι οποίες είναι 1 και 4. Καταλαβαίνουμε λοιπόν ότι οι δυνατές περιπτώσεις του πειράματος θα πρέπει να είναι αυτές που παρουσιάζονται στο διπλανό πίνακα:

1η ρίψη, 2η ρίψη			
(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)

$\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}$
$N(\Omega) = 16$

β) $A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$ και $N(A) = 10$

γ) $B = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$ και $N(B) = 4$.

δ) **i)** $A' = \{(2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$ και $N(A') = 6$.
ii) $\Delta = A \cap B' = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$ και $N(\Delta) = 8$.
iii) $E = A \cup B = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(4,1),(3,3),(4,4)\}$ και $N(E) = 12$.
iv) $Z = (A \cup B)' = \{(2, 4), (3, 4), (4, 2), (4, 3)\}$ και $N(Z) = 4$.
v) $H = A \cap B = \{(1, 1), (2, 2)\}$ και $N(H) = 2$

Σημείωση:

I) Τον ίδιο δειγματικό χώρο έχουμε αν ρίξουμε δύο προφανώς διακριτά μεταξύ τους ζάρια (π.χ. ένα μαύρο και ένα κόκκινο) μία φορά.

II) Αν ρίξουμε δύο όμοια τετραεδρικά ζάρια (π.χ. λευκά) μία φορά τότε ο δειγματικός χώρος του πειράματος γίνεται:
$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)
-------	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)
-------	------	(3, 3)	(3, 4)
-------	------	------	(4, 4)

Αυτό συμβαίνει γιατί δεν υπάρχει σαφής διάκριση μεταξύ των δύο ζαριών, οπότε το στοιχειώδες ενδεχόμενο $\{(2, 3)\}$ είναι ίδιο με το στοιχειώδες ενδεχόμενο $\{(3, 2)\}$.

5. Ένα κουτί περιέχει τρεις μπάλες, μία άσπρη μία μαύρη και μία κόκκινη.

Πείραμα Ι:

Παίρνουμε μία μπάλα καταγράφουμε το χρώμα της και την επανατοποθετούμε στο κουτί. Στη συνέχεια παίρνουμε πάλι μία μπάλα και καταγράφουμε το χρώμα της.

α) Να γραφεί ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος και να βρεθεί το πλήθος των στοιχείων του.

β) Να γραφεί το ενδεχόμενο Α: «η πρώτη μπάλα είναι κόκκινη» και να βρεθεί το πλήθος των στοιχείων του.

γ) Να γραφεί το ενδεχόμενο Β: «να εξαχθεί και τις δύο φορές κόκκινη μπάλα» και να βρεθεί το πλήθος των στοιχείων του.

δ) Να γραφεί το ενδεχόμενο Γ: «να εξαχθεί και τις δύο φορές μπάλα με το ίδιο χρώμα» και να βρεθεί το πλήθος των στοιχείων του.

Πείραμα ΙΙ:

Παίρνουμε δύο μπάλες και καταγράφουμε το χρώμα τους.

α) Να γραφεί ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος και να βρεθεί το πλήθος των στοιχείων του.

β) Να γραφεί το ενδεχόμενο Α: «η μία από τις δύο μπάλες είναι οπωσδήποτε κόκκινη» και να βρεθεί το πλήθος των στοιχείων του.

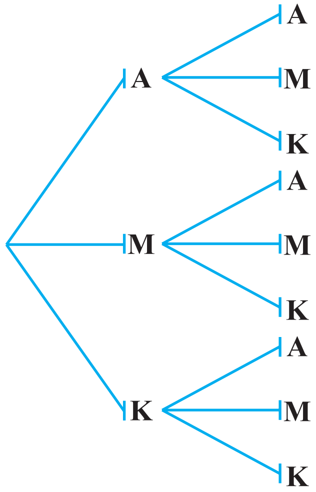
γ) Να γραφεί το ενδεχόμενο Β: «και οι δύο μπάλες είναι διαφορετικού χρώματος» και να βρεθεί το πλήθος των στοιχείων του.

δ) Να γραφεί το ενδεχόμενο Γ: «και οι δύο μπάλες είναι του ίδιου χρώματος» και να βρεθεί το πλήθος των στοιχείων του.

Λύση:

Πείραμα Ι:

α) Αν συμβολίσουμε με Α την άσπρη μπάλα, με Μ τη μαύρη και με Κ την κόκκινη τότε:



β) Α = { ΚΑ, ΚΜ, ΚΚ} και Ν(Α) = 3

γ) Β = {ΚΚ} και Ν(Β) = 1.

δ) Γ = {ΑΑ, ΜΜ, ΚΚ} και Ν(Γ) = 3.

Πείραμα ΙΙ:

α) Ω = {ΑΜ, ΑΚ, ΜΚ} και Ν(Ω) = 3.

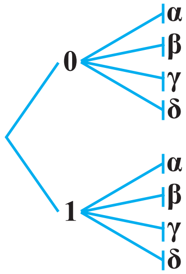
β) Α = {ΑΚ, ΜΚ} και Ν(Α) = 2.

γ) Β = {ΑΜ, ΑΚ, ΜΚ} = Ω και Ν(Β) = 3

δ) Γ = $\varnothing$ και Ν(Γ) = 0

6. Η διεύθυνση ενός νοσοκομείου κωδικοποιεί τους ασθενείς σύμφωνα με την ασφάλειά τους με 0 αν είναι ανασφάλιστοι, 1 αν είναι ασφαλισμένοι και σύμφωνα με την κατάσταση της υγείας τους με
α) αν είναι καλή β) αν είναι μέτρια γ) αν είναι σοβαρή δ) αν είναι κρίσιμη
Να βρεθούν:
ι) ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος.
ιι) το ενδεχόμενο Α «η κατάσταση του ασθενούς είναι σοβαρή ή κρίσιμη και είναι ανασφάλιστος».
ιιι) το ενδεχόμενο Β «η κατάσταση του ασθενούς είναι καλή ή μέτρια».
ιv) το ενδεχόμενο Γ «ο ασθενής είναι ασφαλισμένος».

Λύση:



i) Ω = {(0, α), (0, β), (0, γ), (0, δ), (1, α), (1, β), (1, γ), (1, δ)}

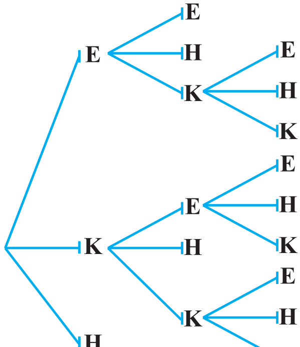
ii) Α = {(0, γ), (0, δ)}

iii) Β = {(0, α), (0, β), (1, α), (1, β)}

iv) Γ = {(1, α), (1, β), (1, γ), (1, δ)}

7. Μία δισκογραφική εταιρία παραγωγής CD ελέγχει την παραγωγή της ως εξής: Ανά δέκα CD από τη γραμμή παραγωγής επιλέγει τυχαία τρία και ελέγχει αν έχουν ελάττωμα εμφάνισης (Ε) ή ελάττωμα ποιότητας ήχου (Η) ή αν δεν έχουν κανένα ελάττωμα (Κ). Αν δύο CD έχουν ελάττωμα εμφάνισης ή ένα έχει ελάττωμα ποιότητας ήχου τότε σταματάει ο έλεγχος και η «παρτίδα» των 10 CD δεν κυκλοφορεί στην αγορά.
α) Να γράψετε το δειγματικό χώρο Ω του πειράματος για μία συγκεκριμένη «παρτίδα» και να βρείτε το πλήθος των στοιχείων του.
β) Να βρεθεί το ενδεχόμενο Α: «η παρτίδα κυκλοφορεί στην αγορά» και το πλήθος των στοιχείων του.

Λύση:



α) Για τα τρία CD έχουμε το διπλανό σχήμα:
Άρα:
Ω = {ΚΚΚ, ΚΚΕ, ΚΚΗ, ΚΕΚ, ΚΕΕ, ΚΕΗ, ΚΗ, ΕΚΚ, ΕΚΕ, ΕΚΗ, ΕΕ, ΕΗ, Η} και Ν(Ω) = 13

β) Α = {ΚΚΚ, ΚΚΕ, ΚΕΚ, ΕΚΚ} και Ν(Α) = 4.

8. Αν Α, Β ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω να αποδείξετε ότι:
α) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ β) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ γ) Αν $A \subseteq B$ τότε $B' \subseteq A'$

Λύση:

α) 1ος τρόπος: Έστω $\alpha \in \Omega$. Αν $\alpha \in A' \cup B' \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\alpha \in A'$ ή $\alpha \in B')$

$\Leftrightarrow (\alpha \notin A$ ή $\alpha \notin B)$

$\Leftrightarrow \alpha \notin A \cap B \Leftrightarrow \alpha \in (A \cap B)'$

2ος τρόπος: Έστω $\alpha \in \Omega$ και $\alpha \in A' \cup B' \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ (πραγματοποιείται το $A \cup B$)

$\Leftrightarrow$ (πραγματοποιείται το A' ή πραγματοποιείται το B')

$\Leftrightarrow$ (δεν πραγματοποιείται το Α ή δεν πραγματοποιείται το Β)

$\Leftrightarrow \alpha \notin A \cap B$

$\Leftrightarrow \alpha \in (A \cap B)'$

β) 1ος τρόπος: Έστω $\alpha \in \Omega$ και $\alpha \in (A \cup B)' \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha \notin A \cup B$

$\Leftrightarrow (\alpha \notin A$ και $\alpha \notin B)$

$\Leftrightarrow (\alpha \in A'$ και $\alpha \in B')$

$\Leftrightarrow \alpha \in A' \cup B'$

2ος τρόπος: Έστω $\alpha \in \Omega$ και $\alpha \in (A \cup B)' \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha \notin A \cup B$

$\Leftrightarrow$ (δεν πραγματοποιείται το $A \cup B$)

$\Leftrightarrow$ (δεν πραγματοποιείται το Α και δεν πραγματοποιείται το Β)

$\Leftrightarrow$ (πραγματοποιείται το $A' \cap B'$)

$\Leftrightarrow \alpha \in A' \cap B'$

γ) Σημείωση: I) Αν $A \subseteq B \Leftrightarrow$ για κάθε $x \in A$ τότε $x \in B$.
II) Αν $A \subseteq B$ και $x \notin B$ τότε $x \notin A$.

Έστω $\alpha \notin B'$ τότε $\alpha \notin B$ άρα $\alpha \notin A$ αφού $A \subseteq B$. Αφού $\alpha \notin A$ τότε $\alpha \in A'$. Άρα $B \subseteq A'$.

Ερωτήσεις Σωστό - Λάθος

Να χαρακτηρίσετε σαν σωστές ή λάθος τις παρακάτω προτάσεις και να αιτιολογήσετε την άποψή σας σε κάθε περίπτωση.

1. Σε ένα πείραμα τύχης ρίχνουμε ένα κέρμα 2 φορές. Αν οι ενδείξεις είναι Κεφαλή (Κ) και Γράμματα (Γ), ο δειγματικός χώρος είναι το σύνολο: $\Omega = \{K, \Gamma\}$. ( )
2. Επιλέγουμε μία σφαίρα από ένα κουτί που περιέχει σφαίρες διαφόρων χρωμάτων, χωρίς να βλέπουμε. Αυτό είναι ένα πείραμα τύχης. ( )
3. Ένας μπασκετμπολίστας του NBA εκτελεί ελεύθερες βολές. Η πράξη αυτή είναι ένα πείραμα τύχης. ( )
4. Τα ενδεχόμενα είναι υποσύνολα του δειγματικού χώρου Ω. ( )
5. Πραγματοποιείται η ρίψη ενός κυβικού ζαριού. Το σύνολο $\{0, 1, 2\}$ είναι ένα ενδεχόμενο του πειράματος. ( )
6. Ρίχνουμε ένα νόμισμα ενός ευρώ (€) δύο φορές [με ενδείξεις Κουκουβάγια (Κ) και Ευρώπη (Ε)]. Το σύνολο $\{(K, K)\}$ είναι ένα ενδεχόμενο του πειράματος. ( )
7. Αφήνουμε να πέσει μία σφαίρα από το μπαλκόνι του σπιτιού μας. Το ενδεχόμενο να πέσει κατακόρυφα είναι βέβαιο. ( )
8. Το ενδεχόμενο Α :$\{(1, 2), (3,4)\}$ έχει 4 ευνοϊκές περιπτώσεις. ( )
9. Σε πείραμα ρίψης ενός ζαριού το ενδεχόμενο $A = \varnothing$ σημαίνει ότι δε ρίχνουμε το ζάρι. ( )
10. Αν Ω είναι δειγματικός χώρος και Α ένα ενδεχόμενο τότε $A' \subseteq \Omega$. ( )
11. Το ενδεχόμενο $A \cup B$ πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται το ενδεχόμενο Α και το ενδεχόμενο Β. ( )
12. Αν Ω είναι δειγματικός χώρος και Α ένα ενδεχόμενό του τότε το ενδεχόμενο $A \cup A'$ είναι βέβαιο. ( )
13. Αν Ω είναι δειγματικός χώρος και Α ενδεχόμενο και $A' = \Omega \Rightarrow A = \varnothing$. ( )
14. Όταν η πραγματοποίηση του ενδεχομένου Α συνεπάγεται την πραγματοποίηση του Β τότε $A \subseteq B$. ( )
15. Το ενδεχόμενο $(A \cap B)'$ σημαίνει ότι δεν πραγματοποιείται ούτε το ενδεχόμενο Α ούτε το ενδεχόμενο Β. ( )
16. Το ενδεχόμενο $A \cap B$ σημαίνει ότι πραγματοποιείται μόνο ένα από τα ενδεχόμενα Α και Β. ( )
17. Ισχύει $A - B = A - (A \cap B)$. ( )
18. Αν $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$. ( )
19. Τα ενδεχόμενα: Α: ο Γιάννης θα ταξιδέψει στη Φλώρινα, Β: ο Γιάννης θα ταξιδέψει με πλοίο, είναι ασυμβίβαστα. ( )
20. Τα ενδεχόμενα $\{1\}$, $\{2\}$ κατα τη ρίψη ενός ζαριού είναι ασυμβίβαστα. ( )
21. Ένας δειγματικός χώρος Ω έχει δύο ενδεχόμενα Α και Β. Αν τα Α, Β είναι ασυμβίβαστα τότε $A \cup B = \Omega$. ( )
22. Αν δύο ενδεχόμενα είναι ασυμβίβαστα, τότε $A \cap B = \varnothing$. ( )
23. Δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα Α, Β έχουν $N(A) \neq N(B)$. ( )

24. Ένας δειγματικός χώρος Ω έχει δύο ενδεχόμενα Α και Β. Αν $N(A) + N(B) = N(\Omega)$, τότε τα ενδεχόμενα είναι ασυμβίβαστα. ( )

25. Έστω ότι ρίχνουμε 2 διαδοχικές φορές ένα κέρμα. Τότε $N(\Omega) = 2$. ( )

26. Αν $N(A) = 3$ και $N(B) = 4$, τότε $N(A \cap B) \leq 7$. ( )

27. Αν $N(A) < N(B)$, τότε $A \subseteq B$. ( )

28. Ένας δειγματικός χώρος Ω έχει δύο ενδεχόμενα Α και Β. Τότε θα ισχύει ότι ή $A \cup B$ ή θα είναι ασυμβίβαστα. ( )

29. Τα ενδεχόμενα της ρίψης ενός κυβικού ζαριού Α: φέρνουμε 5 ή 6, Β: φέρνουμε άρτιο αριθμό, είναι ασυμβίβαστα. ( )

30. Έστω ότι ρίχνουμε ένα κυβικό ζάρι μία φορά. Τότε $N(\Omega) = 6$. ( )

Ερωτήσεις Πολλαπλής Επιλογής.

1. Ποιο από τα παρακάτω είναι πείραμα τύχης;
   α) Αφήνουμε μια σφαίρα να πέσει κατακόρυφα.
   β) Θερμαίνουμε σε Κ. Σ. νερό και αυτό εξατμίζεται.
   γ) Ένα αυτοκίνητο σταματά μόλις πατήσουμε φρένο.
   δ) Η σφαίρα της ρουλέτας σταματά στο 3 κόκκινο.
   ε) Κανένα από τα παραπάνω.

2. Μία σφαίρα εκτελεί ελεύθερη πτώση σε κενό αέρος. Το ενδεχόμενο να πέσει κατακόρυφα είναι:
   α) βέβαιο β) αδύνατο γ) πιθανό δ) ευνοϊκό ε) κανένα από τα παραπάνω

3. Ποια σχέση από τις παρακάτω είναι σωστή;
   α) Τα ενδεχόμενα $(A \cap B)'$ και $A' \cap B'$ είναι αντίθετα.
   β) Τα ενδεχόμενα $A \cup B$ και $A \cap B'$ είναι ασυμβίβαστα.
   γ) Τα ενδεχόμενα $A \cup B'$ και $A' \cap B$ είναι αντίθετα.
   δ) Τα ενδεχόμενα $A \cup B'$ και $A' \cup B$ είναι αντίθετα.
   ε) Καμία από τις παραπάνω δεν είναι σωστή.

4. Ένα κουτί περιέχει 3 σφαίρες αριθμημένες. Τραβάμε στην τύχη 2 από αυτές (ταυτόχρονα). Ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι:
   α) $\Omega = \{1, 2, 3\}$ β) $\Omega = \{1, 2\}$ γ) $\Omega=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$
   δ) $\Omega = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$ ε) κανένα από τα παραπάνω.

5. Έστω δειγματικός χώρος Ω και τα ενδεχόμενα Α, Β. Το ενεχόμενο: δεν πραγματοποιείται ούτε το Α ούτε το Β είναι το:
   α) $A' \cap B'$ β) $A' \cup B'$ γ) $(A \cap B)'$ ε) κανένα από τα παραπάνω

6. Έστω δειγματικός χώρος Ω και Α, Β ενδεχόμενά του. Ισχύει ότι Α - Β ισούται:
α) $A \cap B$ β) $(A \cup B)'$ γ) $A' \cap B$
δ) $A \cap B'$ ε) κανένα από τα παραπάνω

7. Δύο ενδεχόμενα Α, Β δειγματικού χώρου Ω είναι ασυμβίβαστα, τότε:
α) $A \cap B = \varnothing$ β) $A \cup B = \varnothing$ γ) $A \cap B = \Omega$
δ) $A \cap B = \Omega$ ε) κανένα από τα παραπάνω

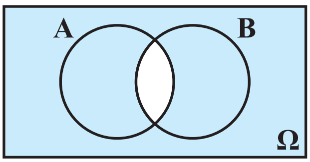
8. Ρίχνουμε ένα νόμισμα ενός € διαδοχικά δύο φορές. Ποιο από τα παρακάτω δεν είναι ενδεχόμενο του πειράματος;
α) {(Κ, Κ), (Κ, Ε)} β) {Ε} γ) {(Κ, Κ)}
δ) {(Κ, Κ), (Κ, Ε), (Ε, Ε), (Ε, Κ)} ε) κανένα από τα παραπάνω

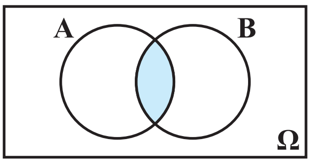
9. Το ενδεχόμενο $A \cup B$ πραγματοποιείται όταν:
α) Πραγματοποιούνται τα Α και Β ταυτόχρονα.
β) Πραγματοποιείται τουλάχιστον ένα από τα Α, Β.
γ) Πραγματοποιείται το Α άλλα όχι το Β.
δ) Πραγματοποιείται το πολύ ένα από τα Α, Β.
ε) Τίποτα από τα παραπάνω.

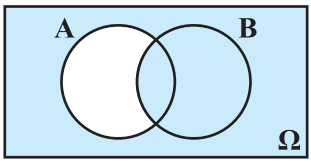
10. Έστω ενδεχόμενα Α, Β δειγματικού χώρου Ω με $N(A) \leq N(B)$, τότε:
α) $A \subseteq B$ β) $B \subseteq A$ γ) $A = B$
δ) $A \cap B = \varnothing$ ε) τίποτε από τα προηγούμενα

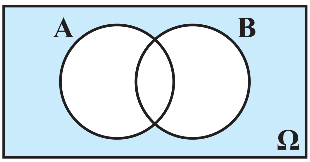
Ασκήσεις Αντιστοίχισης.

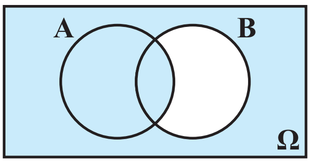
1. Αντιστοιχίστε τις σχέσεις με τα διαγράμματα:
1) $A' \cup B$ 2) $(A \cap B)'$ 3) $(A \cup B)'$ 4) $A \cup B$ 5) $A \cup B'$ 6) $A \cap B$

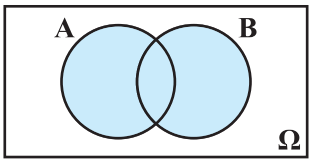
α)


β)


γ)


δ)


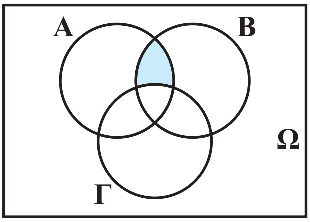
ε)


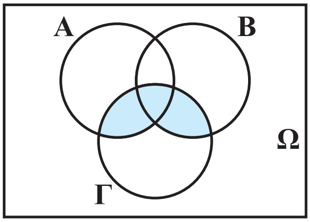
ζ)


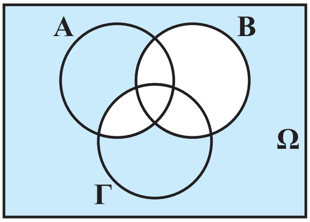
2. Αντιστοιχίστε τις σχέσεις με τα διαγράμματα:

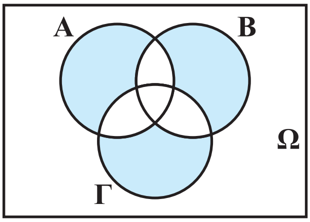
1) $(A \cap B') \cup (B \cap A')$ 2) $(A \cap B) \cap \Gamma'$

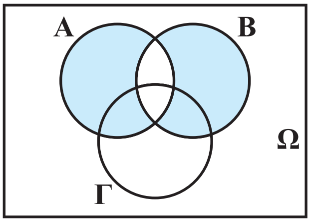
3) $(A \cap B' \cap \Gamma') \cup (B \cap A' \cap \Gamma') \cup (\Gamma \cap A' \cap B')$ 4) $(A \cap B) \cup \Gamma$

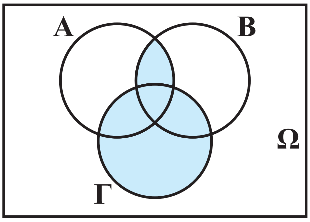
α) 

β) 

γ) 

δ) 

ε) 

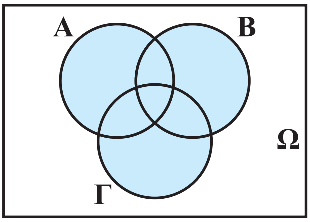
ζ) 

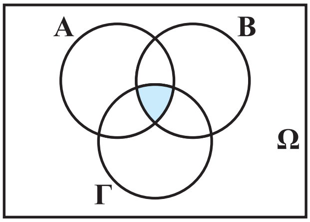
3. Αντιστοιχίστε τις σχέσεις με τα διαγράμματα:

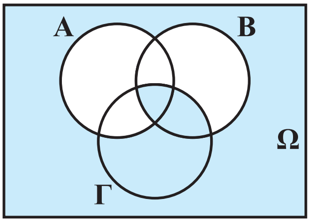
1) $(A \cup B) \cap \Gamma$ 2) $(A \cap B) \cup (B \cap \Gamma) \cup (A \cap \Gamma)$

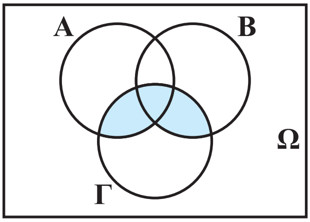
3) $A \cap B \cap \Gamma$ 4) $((A - B) \cup (A - \Gamma) \cup (B - \Gamma))'$

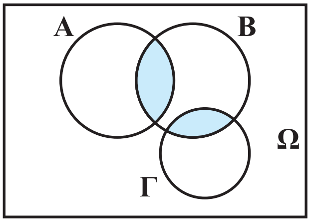
5) $A \cup B \cup \Gamma$ 6) $(A \cap B) \cup (B \cap \Gamma)$ και $A \cap \Gamma = \varnothing$

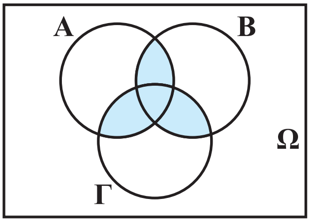
α) 

β) 

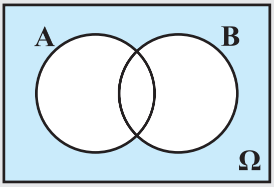
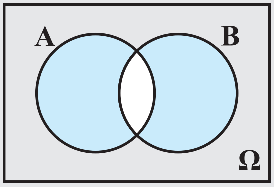
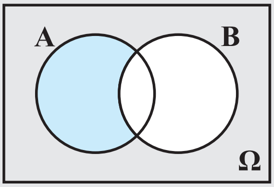
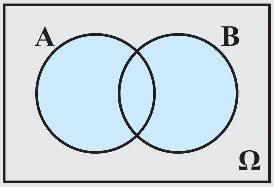
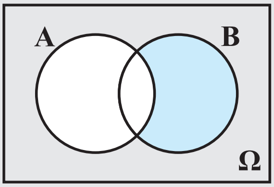
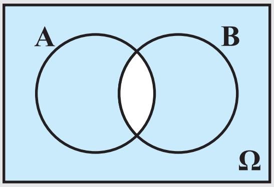
γ) 

δ) 

ε) 

ζ) 

4. Για ενδεχόμενα Α, Β δειγματικού χώρου Ω ισχύουν τα παρακάτω:

Στήλη Α	Στήλη Β	Στήλη Γ
	α. $(A \cap B)'$	I) 
	β. $A \cup B'$	II) 
	γ. $(A \cap B') \cup (A' \cap B)$	III) 
	δ. $A \cup B$	IV) 
	ε. $(A \cup B)'$	V) 
	στ. $((A \cap B') \cup (A' \cap B))'$	VI) 

5. Ρίχνουμε δυο κυβικά ζάρια ταυτόχρονα. Αντιστοιχίστε τα ενδεχόμενα των πινάκων Α και Β. Συμπληρώστε τον πίνακα Γ με βάση τα ενδεχόμενα του πίνακα Α στην περίπτωση που τα ζάρια ρίχνονται διαδοχικά.

Πίνακας Α
1. Το άθροισμα των ενδείξεων είναι μικρότερο ή ίσο του 5.
2. Το άθροισμα των ενδείξεων είναι άρτιο και μικρότερο του 5.
3. Το άθροισμα των ενδείξεων είναι πολλαπλάσιο του 3.
4. Η μια ένδειξη είναι διπλάσια της άλλης.

Πίνακας Β
i) $A = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6)\}$
ii) $A = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6)\}$
iii) $A = \{(1, 2), (1, 5), (2, 4), (3, 3), (3, 6), (4, 5), (6, 6)\}$
iv) $A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3)\}$
v) $A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$
vi) $A = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2)\}$

Πίνακας Γ
1. ....
2. ....
3. ....
4. ....

Ασκήσεις.

1. **Ρίχνουμε ένα κυβικό ζάρι 2 διαδοχικές φορές.**
i) Να γραφεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος και το πλήθος των στοιχείων του.
ii) Να αναγραφούν τα ενδεχόμενα, και να βρεθεί το πλήθος των στοιχείων τους.
α) Και στις δύο ρίψεις εμφανίζεται άρτιος αριθμός.
β) Ο αριθμός της πρώτης ρίψης είναι μικρότερος από της δεύτερης.
γ) Και στις δύο ρίψεις εμφανίζεται ο ίδιος αριθμός.
δ) Στη δεύτερη ρίψη φέρνουμε 6 εφόσον στην πρώτη φέρνουμε άρτιο αριθμό.
ε) Το άθροισμα των αριθμών στις δύο ρίψεις είναι 8.

2. **Ρίχνουμε ένα κέρμα ενός € τρεις φορές.**
i) Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος και το πλήθος των στοιχείων του.
ii) Να βρεθούν τα ενδεχόμενα και το πλήθος των στοιχείων τους.
Α: Η πρώτη ρίψη φέρνει κουκουβάγια (Κ).
Β: Η πρώτη και η τρίτη ρίψη έχουν το ίδιο αποτέλεσμα.
iii) Να εκφράσετε με λόγια τα ενδεχόμενα: $A \cap B$, Α΄, Β΄.
iv) Να βρεθούν τα ενδεχόμενα του ερωτήματος (iii).

3. **Έστω δειγματικός χώρος Ω και τα ενδεχόμενα, Α, Β, Γ. Αν τα ενδεχόμενα ανά δυο δεν είναι ασυμβίβαστα, να εκφράσετε με τη βοήθεια των διαγραμμάτων του Venn τα παρακάτω ενδεχόμενα:**
α) Πραγματοποιούνται τα Α, Γ αλλά όχι το Β.
β) Πραγματοποιείται μόνο ένα από τα τρία ενδεχόμενα.
γ) Πραγματοποιούνται και τα τρία ενδεχόμενα.

4. **Ένα κουτί περιέχει 5 σφαίρες: μία μαύρη (μ), δύο κόκκινες (κ) και δύο πράσινες (π). Επιλέγουμε κάθε φορά δύο σφαίρες τυχαία, τις οποίες παίρνουμε τη μια μετά την άλλη.**
i) Να αναγραφεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος.
ii) Να αναγραφούν τα ενδεχόμενα:
Α: Έχω δύο σφαίρες του ίδιου χρώματος. **Β: Έχω δύο σφαίρες και η μια είναι μαύρη.**
Γ: Έχω δύο σφαίρες και καμία δεν είναι μαύρη.

5. **Ρίχνουμε ένα νόμισμα το πολύ 5 φορές. Το πείραμα σταματά νωρίτερα αν φέρουμε δυο διαδοχικές φορές την ίδια ένδειξη. Να γραφεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος.**

6. **Δυο παίκτες Α, Β παίζουν σκάκι. Νικητής είναι αυτός που θα κερδίσει τρία παιχνίδια. Να κατασκευάσετε το δενδροδιάγραμμα του δειγματικού χώρου του πειράματος.**

7. **Εξετάστε αν το τάβλι είναι ένα τυχερό παιχνίδι. Το μπαρμπούτι παίζεται επίσης με ζάρια. Είναι τυχερό παιχνίδι; Πώς θα μπορούσε κάποιος να «κλέψει» σε αυτά τα παιχνίδια; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.**

8. **Να επαληθευτούν οι παρακάτω ισότητες με τα διαγράμματα του Venn.**
i) $(A \cap B) \cap (A \cap B') = \varnothing$ **ii)** $(A \cap B') \cup (B \cap A') = (A \cup B) \cap (A \cap B)'$

9. **Ένα φροντιστήριο Ξένων Γλωσσών δίνει βαθμούς στους μαθητές (Α) και στις μαθήτριες (Κ), χαρακτηρίζοντας τους με «Καλώς» (Κ), «Λίαν Καλώς» (Λ) και «Άριστα» (Α). Επιλέγουμε τυχαία ένα παιδί.**
i) Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος.
ii) Να βρεθούν τα ενδεχόμενα:
α) Το παιδί να πάρει άριστα.
β) Η μαθήτρια να μην πάρει άριστα.

10. **Δύο παίκτες Α, Β παίζουν ένα παιχνίδι. Νικητής είναι αυτός που θα κερδίσει τρία παιχνίδια συνεχόμενα ή πέντε παιχνίδια. Να βρείτε το δειγματικό χώρο του πειράματος.**

11. **Ρίχνουμε ένα κυβικό ζάρι δύο φορές και έστω τα ενδεχόμενα:**
Α: το άθροισμα των ενδείξεων είναι 7.
Β: το γινόμενο των ενδείξεων διαιρείται με το 3.
Γ: η ένδειξη της πρώτης ρίψης είναι άρτιος και μεγαλύτερη της δεύτερης.
Να γράψετε τα στοιχεία των ενδεχομένων: α) $(A \cap B)$ β) $(A \cap \Gamma)'$ γ) $(A \cup \Gamma)$

12. **Ρίχνουμε ένα νόμισμα ενός € το πολύ 5 φορές. Το πείραμα σταματά νωρίτερα αν φέρουμε την όψη «Ευρώπη». Να γραφεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος.**

13. **Έστω δειγματικός χώρος Ω και τα ενδεχόμενα Α, Β, Γ. Με τη βοήθεια των διαγραμμάτων του Venn να εκφράσετε τα ενδεχόμενα:**
i) Να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα Α, Β, Γ.
ii) Να πραγματοποιηθεί το Α και το Β μαζί ή το Α και το Γ μαζί.

14. **Έστω Α, Β δυο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω. Να δείξετε ότι:**
i) Τα ενδεχόμενα $A' \cap B$ **και** $A \cap B$ **είναι ασυμβίβαστα.**
ii) Τα ενδεχόμενα $A' \cup B$ **και** $A \cap B'$ **είναι αντίθετα.**

3.2 Η Έννοια της Πιθανότητας.

Απαραίτητες γνώσεις Θεωρίας

Θεωρία 1.

α) Τι ονομάζουμε σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου Α;
β) Ποιες ιδιότητες ισχύουν για τις σχετικές συχνότητες στοιχειωδών ενδεχομένων ενός πεπερασμένου δειγματικού χώρου Ω;
γ) Ποια ιδιότητα ισχύει για τη σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου Α του δειγματικού χώρου Ω;

Απάντηση:

α) Αν σε ν επαναλήψεις ενός πειράματος τύχης το ενδεχόμενο Α πραγματοποιήται κ φορές τότε το πηλίκο $\frac{\kappa}{\nu}$ ονομάζεται σχετική συχνότητα του ενδεχομένου Α και συμβολίζεται με f_A, δηλαδή $f_A = \frac{\kappa}{\nu}$.

β) Αν $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\nu\}$ πεπερασμένος δειγματικός χώρος και $A = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\lambda\}$ ενδεχόμενό του Ω τότε: **i)** $0 \le f\omega_i \le 1$ για κάθε $1 \le i \le \nu$ **ii)** $f\omega_1 + f\omega_2 + ... + f\omega_\nu = 1$

γ) Για τη σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου Α του δειγματικού χώρου Ω ισχύει: $f_A = f\alpha_1 + f\alpha_2 + ... + f\alpha_\lambda$

Θεωρία 2.

α) Τι αναφέρει ο νόμος των μεγάλων αριθμών;
β) Ποιος είναι ο κλασσικός ορισμός της πιθανότητας ενός ενδεχομένου Α;
γ) Ποια άμεσα συμπεράσματα προκύπτουν από τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας;
δ) Ποιος είναι ο αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας ενός ενδεχομένου Α;

Απάντηση:

α) Ο νόμος των μεγάλων αριθμών αναφέρει ότι όταν σε ένα πείραμα τύχης ο αριθμός

των δοκιμών αυξάνει απεριόριστα, τότε η σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου σταθεροποιείται γύρω από μία συγκεκριμένη αριθμητική τιμή. Ο παραπάνω νόμος αποδεικνύεται και θεωρητικά και πειραματικά.
π.χ. Κατά τη ρίψη ενός νομίσματος η σχετική συχνότητα της όψεως «Κουκουβάγια» μετά από πολύ «μεγάλο» αριθμό ρίψεων «σταθεροποιείται» γύρω από την αριθμητική τιμή 0,5.

β) Η πιθανότητα ενός ενδεχομένου Α ενός δειγματικού χώρου Ω είναι το πηλίκο του πλήθους των ευνοϊκών περιπτώσεων του Α προς το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων του πειράματος, δηλαδή:

$$\mathbf{P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}}$$ **(Laplace 1812)**

γ) I) Προφανώς αφού $A \subseteq \Omega$ τότε $N(A) \leq N(\Omega)$ άρα $0 \leq P(A) \leq 1$.

II) $P(\Omega) = 1$ (αφού $P(\Omega)=\frac{N(\Omega)}{N(\Omega)}$)

III) $P(\varnothing) = 0$ (αφού $P(\varnothing)=\frac{N(\varnothing)}{N(\Omega)}=\frac{0}{N(\Omega)}=0$)

δ) Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\nu\}$ δειγματικός χώρος και $A = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\lambda\} \neq \varnothing$ ενδεχόμενο του Ω.
Σε κάθε απλό ενδεχόμενο $\{\omega_i\}$ του Ω αντιστοιχίζουμε έναν πραγματικό αριθμό που τον ονομάζουμε πιθανότητα του $\{\omega_i\}$ και τον συμβολίζουμε με $P(\omega_i)$ για τον οποίο ισχύουν:

- $\mathbf{0 \leq P(\omega_i) \leq 1}$
- $\mathbf{P(\omega_1) + P(\omega_2) + ... + P(\omega_\nu) = 1}$

Πιθανότητα του Α (συμβολίζουμε P(A)) και ορίζουμε το άθροισμα:
$P(A) = P(\alpha_1) + P(\alpha_2) + ... + P(\alpha_\lambda)$.
Αν $A = \varnothing$ τότε ορίζουμε $P(\varnothing) = 0$.

Θεωρία 3.

α) Αν $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\nu\}$ και « πάρουμε ένα τυχαίο στοιχείο του Ω », τι θεωρούμε για τα στοιχεία του Ω όσον αφορά την πιθανότητά τους;
β) Αν Α, Β ενδεχόμενα του Ω, ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις;
I) Αν Α = Β τότε P(A) = P(B)
II) Αν P(A) = P(B) τότε Α = Β
III) Αν P(A) = 1 τότε Α = Ω
IV) Αν P(A) = 0 τότε $A = \varnothing$

Απάντηση:

α) Αν χρησιμοποιήσουμε τη φράση «παίρνω τυχαία ένα στοιχείο του Ω» εννοείται ότι όλα τα δυνατά αποτελέσματα του Ω είναι ισοπίθανα, δηλαδή: $P(\omega_i)=\frac{1}{\nu}$ για κάθε $1 \leq i \leq \nu$.

β) I) Ισχύει διότι άν $A = B \Rightarrow N(A) = N(B) \Leftrightarrow \frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{N(B)}{N(\Omega)} \Leftrightarrow P(A) = P(B)$.

ΙΙ) Δεν ισχύει διότι έστω $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ και $A = \{1, 3\}$ και $B = \{2, 4\}$ τότε:

$P(A) = P(B) = \frac{2}{5}$, αν και $A \neq B$.

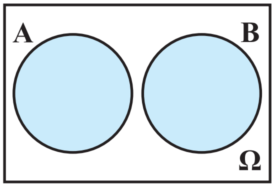
ΙΙΙ) Ισχύει.

IV) Ισχύει.

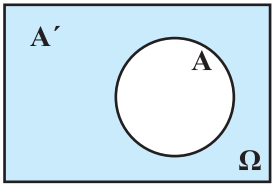
Θεωρία 4.

Να αναφέρετε τους κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων και τις αποδείξεις τους.

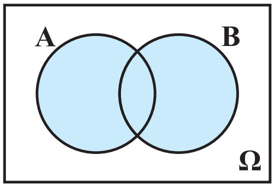
α)



β)



γ)



Απάντηση:

Αν Α, Β ενδεχόμενα του Ω τότε:

α) Αν $A \cap B = \varnothing$ τότε $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Απόδειξη: Αν $N(A) = \kappa$ και $N(B) = \lambda$ επειδή τα Α, Β είναι ασυμβίβαστα τότε: $N(A \cup B) = \kappa + \lambda$

Άρα: $P(A \cup B) = \frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A) + N(B)}{N(\Omega)} =$

$= \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)} = P(A) + P(B)$

β) $P(A') = 1 - P(A)$

Απόδειξη: Για τα Α και Α΄ ισχύουν $A \cap A' = \varnothing$ (ασυμβίβαστα) και $A \cup A' = \Omega$.

Άρα (λόγω του α) $P(A \cup A') = P(\Omega)$

$P(A) + P(A') = 1 \Leftrightarrow P(A') = 1 - P(A)$

γ) Προσθετικός νόμος: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Απόδειξη: Αν Α, Β ενδεχόμενα του Ω με $A \cap B \neq \varnothing$ τότε:

$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$

Οπότε: $\frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)} - \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)}$

Άρα: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Σχόλιο:

Αν $A \cap B = \varnothing$, πάλι ισχύει ο προσθετικός νόμος: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, όμως επειδή $P(A \cap B) = P(\varnothing) = 0$ καταλήγουμε στην (α) περίπτωση.

δ) Αν $A \subseteq B$ τότε $P(A) \leq P(B)$

Απόδειξη: Αν $A \subseteq B$ τότε $N(A) \leq N(B)$ οπότε

$\frac{N(A)}{N(\Omega)} \leq \frac{N(B)}{N(\Omega)}$ Άρα $P(A) \leq P(B)$

ε) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

Απόδειξη: Αν Α, Β ενδεχόμενα του Ω τότε: $A = (A - B) \cup (A \cap B)$ και $(A - B) \cap (A \cap B) = \varnothing$ οπότε $P(A) = P((A - B) \cup (A \cap B))$ επομένως $P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)$. Άρα $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.

Χρήσιμες ταυτότητες και ανισότητες

Α. Ταυτότητες	Β. Ανισότητες
$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$	$\alpha^2 \geq 0$, για κάθε $\alpha \in R$
$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$	$\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta$, για κάθε $\alpha, \beta \in R$
$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$	$\alpha^2 + \beta^2 \geq -2\alpha\beta$, για κάθε $\alpha, \beta \in R$
$(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$	$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$, για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in R$
$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$	$\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2$ για κάθε $\alpha > 0$
$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$	$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \geq 2$ με α, β θετικούς
$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$	

Λυμένες Ασκήσεις.

1. **Έστω δειγματικός χώρος $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$.**

α) Αν $P(\omega_1)=\frac{1}{2}$, $P(\omega_2)=\frac{1}{4}$ και $P(\omega_3)=\frac{1}{8}$,να βρεθεί η $P(\omega_4)$.

β) Αν $A = \{\omega_1, \omega_3\}$ και $B = \{\omega_1, \omega_4\}$ και $P(A)=\frac{1}{4}$ και $P(B)=\frac{1}{2}$ και $P(\omega_1)=\frac{1}{6}$ να βρεθεί η $P(\omega_2)$.

Λύση:

α) $P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) + P(\omega_4) = 1$

Άρα: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+P(\omega_4)=1 \Leftrightarrow P(\omega_4)=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$

β) $P(A) = P(\omega_1) + P(\omega_3)$

Άρα: $\frac{1}{6}+P(\omega_3)=\frac{1}{4}$ δηλαδή: $P(\omega_3)=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$

$P(B) = P(\omega_1) + P(\omega_4)$.

Άρα: $\frac{1}{6}+P(\omega_4)=\frac{1}{2}$ δηλαδή: $P(\omega_4)=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$

Όμως: $P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) + P(\omega_4) = 1$

Άρα: $\frac{1}{6}+P(\omega_2)+\frac{1}{12}+\frac{1}{3}=1$ δηλαδή: $P(\omega_2)=1-\frac{1}{12}-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}=\frac{5}{12}$

2. **Αν Α, Β ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω και $P(A\cup B)=3/4$, $P(B')=2/3$, $P(A\cap B)=1/4$, να βρεθούν οι πιθανότητες:**

i) $P(B)$ ii) $P(A)$ iii) $P(A - B)$ iv) $P(B - A)$
v) $P(A'\cap B')$ vi) $P((A - B) \cup (B - A))$.

Λύση:

i) $P(B) = 1 - P(B')$ άρα: $P(B)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

ii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ δηλαδή: $\frac{3}{4}=P(A)+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$

Άρα: $P(A)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

iii) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$ δηλαδή: $P(A-B)=\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$

iv) P(B - A) = P(B) - P(A ∩ B) δηλαδή: $P(B-A)=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$

v) P(A΄ ∩ B΄) = P((A ∪ B)΄) = 1 - P(A ∪ B) δηλαδή: $P(A'\cap B')=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

vi) P(A΄∪ B΄) = P((A ∩ B)΄) = 1 - P(A ∩ B) δηλαδή: $P(A'\cup B')=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

vii) Τα A - B και B - A είναι ασυμβίβαστα, άρα P((A - B) ∪ (B - A)) = P(A - B) + P(B - A)

δηλαδή: $P\big((A-B)\cup(B-A)\big)=\frac{5}{12}+\frac{1}{12}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$

---

3. Αν A, B ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω και $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{2}{5}$ και $P(A\cap B)=\frac{1}{5}$

Να υπολογιστούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων.

α) Δεν πραγματοποιείται το A

β) Δεν πραγματοποιείται το B

γ) Πραγματοποιείται τουλάχιστον ένα από τα A,B

δ) Πραγματοποιείται μόνο το A

ε) Πραγματοποιείται το B και όχι το A

στ) Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα A, B

ζ) Πραγματοποιείται ακριβώς ένα από τα A, B

Λύση:

α) Είναι το A΄. Άρα: P(A΄) = 1 - P(A) δηλαδή: $P(A')=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

β) Είναι το B΄. Άρα P(B΄) = 1 - P(B) δηλαδή: $P(B')=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$

γ) Είναι το A ∪ B. Άρα P(A ∪ B) = P(A) + P(B) - P(A ∩ B) δηλαδή: $P(A\cup B)=\frac{1}{2}+\frac{2}{5}-\frac{1}{5}=\frac{7}{10}$

δ) Είναι το A ∩ B΄. Άρα P(A - B) = P(A) - P(A ∩ B) δηλαδή: $P(A-B)=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{3}{10}$

ε) Είναι το B - A = B ∩ A΄. Άρα P(B - A) = P(B) - P(A ∩ B) δηλαδή: $P(B-A)=\frac{2}{5}-\frac{1}{5}=\frac{1}{5}$

στ) Είναι το (A ∪ B)΄ = A΄∩ B΄. Άρα P((A ∪ B)΄) = 1 - P(A ∪ B) δηλαδή: $P\big((A\cup B)'\big)=1-\frac{7}{10}=\frac{3}{10}$

ζ) Είναι το (A - B) ∪ (B - A). Τα A - B, B - A είναι ασυμβίβαστα.

Άρα: P((A - B) ∪ (B - A)) = P(A - B) + P(B - A) = P(A) - P(A ∩ B) + P(B) - P(A ∩ B) =
= P(A) + P(B) - 2P (A ∩ B)

Δηλαδή: $P\big((A-B)\cup(B-A)\big)=\frac{1}{2}+\frac{2}{5}-2\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{2}$

4. Σε μία έρευνα μεταξύ των μαθητών μίας τάξης διαπιστώθηκε ότι το 50% δεν είχε διαβάσει φυσική, το 70% δεν είχε διαβάσει μαθηματικά και το 80% δεν είχε διαβάσει και τα δύο μαθήματα. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων.
α) Ένας μαθητής έχει διαβάσει φυσική.
β) Ένας μαθητής έχει διαβάσει μαθηματικά.
γ) Ένας μαθητής έχει διαβάσει και τα δύο μαθήματα.
δ) Ένας μαθητής έχει διαβάσει τουλάχιστον ένα από τα δύο μαθήματα.
ε) Ένας μαθητής έχει διαβάσει μόνο φυσική.
στ) Ένας μαθητής έχει διαβάσει μαθηματικά και φυσική.
ζ) Ένας μαθητής δεν έχει διαβάσει κανένα από τα δύο μαθήματα.
η) Ένας μαθητής έχει διαβάσει μόνο μαθηματικά ή μόνο φυσική (ακριβώς ένα από τα δύο μαθήματα).

Λύση:

Έστω τα ενδεχόμενα:
Α: έχει διαβάσει φυσική, οπότε: Α΄: δεν έχει διαβάσει φυσική.
Β: έχει διαβάσει μαθηματικά, οπότε: Β΄: δεν έχει διαβάσει μαθηματικά.

Άρα: $P(A')=\frac{50}{100}$, $P(B')=\frac{70}{100}$

$A\cap B$: έχει διαβάσει και τα δύο μαθήματα.
Άρα $(A\cap B)'$: δεν έχει διαβάσει και τα δύο μαθήματα.

Άρα: $P((A\cap B)')=\frac{80}{100}$

α) $P(A) = 1 - P(A')$ δηλαδή: $P(A)=1-\frac{50}{100}=\frac{50}{100}$

β) $P(B) = 1 - P(B')$ δηλαδή: $P(B)=1-\frac{70}{100}=\frac{30}{100}$

γ) Έχει διαβάσει και τα δύο μαθήματα: $A\cap B$. Άρα: $P(A\cap B) = 1 - P((A\cap B)')$ δηλαδή:

$$P(A\cap B)=1-\frac{80}{100}=\frac{20}{100}$$

δ) Έχει διαβάσει τουλάχιστον ένα από τα δύο μαθήματα: $A\cup B$.

Άρα: $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$ δηλαδή: $P(A\cup B)=\frac{50}{100}+\frac{30}{100}-\frac{20}{100}=\frac{60}{100}$

ε) Έχει διαβάσει μόνο φυσική $A - B = A\cap B'$ Άρα: $P(A - B) = P(A) - P(A\cap B)$ δηλαδή:

$$P(A-B)=\frac{50}{100}-\frac{20}{100}=\frac{30}{100}$$

στ) Έχει διαβάσει μαθηματικά και όχι φυσική: $B - A = B\cap A'$ Άρα: $P(B - A) = P(B) - P(A\cap B)$

δηλαδή: $P(B-A)=\frac{30}{100}-\frac{20}{100}=\frac{10}{100}$

ζ) Δεν έχει διαβάσει κανένα από τα δύο μαθήματα $(A\cup B)'$ Άρα: $P((A\cup B)')=1-P(A\cup B)$

δηλαδή: $P((A\cup B)')=1-\frac{60}{100}=\frac{40}{100}$

η) Έχει διαβάσει μόνο μαθηματικά ή μόνο φυσική: $(B-A)\cup(A-B)$. Τα $A-B$, $B-A$ είναι ασυμβίβαστα. Άρα $P((A-B)\cup(B-A))=P(A-B)+P(B-A)$ δηλαδή:

$P((A-B)\cup(B-A))=\frac{30}{100}+\frac{10}{100}=\frac{40}{100}$

5. Σε ένα σχολείο στο μάθημα της Γυμναστικής κάθε μαθητής μπορεί να διαλέξει μέχρι τρία αθλήματα. Το ποδόσφαιρο το διάλεξαν όλοι. Το 70% δεν διάλεξαν μπάσκετ. Το 40% διάλεξε και στίβο. Το 65% δε διάλεξε ούτε στίβο ούτε μπάσκετ. Αν εκλέξουμε ένα μαθητή στην τύχη να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων:
α) Να έχει διαλέξει τουλάχιστον ένα άθλημα. β) Να έχει διαλέξει και τα τρία αθλήματα.

Λύση:

Αν Ω είναι ο δειγματικός χώρος με στοιχεία τους μαθητές του σχολείου και ενδεχόμενα:
Π: ο μαθητής διαλέγει ποδόσφαιρο, Μ: ο μαθητής διαλέγει μπάσκετ
Σ: ο μαθητής διαλέγει στίβο.
Τότε: $\Omega=\Pi$ οπότε $P(\Omega)=P(\Pi)=1$
Μ΄: ο μαθητής δε διαλέγει μπάσκετ

Άρα: $P(M)=1-P(M')$ δηλαδή: $P(M)=1-\frac{70}{100}=\frac{30}{100}$

$P(\Omega\cap\Sigma)=P(\Sigma)=\frac{40}{100}$, $P(M\cup\Sigma)'=\frac{65}{100}$

α) $P(\Pi\cup M\cup\Sigma)=P(\Omega\cup M\cup\Sigma)=P(\Omega)=1$

β) $P(\Pi\cap M\cap\Sigma)=P(\Omega\cap M\cap\Sigma)=P(M\cap\Sigma)$

Όμως: $P(M\cup\Sigma)=P(M)+P(\Sigma)-P(M\cap\Sigma)$

Επίσης: $P(M\cup\Sigma)=1-P((M\cup\Sigma)')$ δηλαδή: $P(M\cup\Sigma)=1-\frac{65}{100}=\frac{35}{100}$

Άρα $\frac{35}{100}=\frac{30}{100}+\frac{40}{100}-P(M\cap\Sigma) \Leftrightarrow P(M\cap\Sigma)=\frac{30}{100}+\frac{40}{100}-\frac{35}{100}$

Άρα: $P(\Pi\cap M\cap\Sigma)=\frac{35}{100}$

6. **Έστω δειγματικός χώρος $\Omega = \{0, 1, 2, 3, ..., 100\}$. Αν $P(\kappa) = 1/2^{\kappa}$ για $\kappa = 1, 2, 3, ..., 100$. Να υπολογίσετε την P(0).**

Λύση:

$$P(0)+P(1)+P(2)+P(3)+...+P(100)=1 \iff P(0)+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{100}}=1 \iff$$

$$P(0)=1-\left(\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{100}}}_{\substack{\text{όροι γεωμετρικής προόδου} \\ \text{με } \alpha_1=\frac{1}{2} \text{ και } \lambda=\frac{1}{2}}}\right)$$

Σημείωση:
Αν α_ν γεωμετρική πρόοδος με πρώτο όρο α_1 και λόγο λ τότε το άθροισμα των ν-πρώτων όρων δίνεται από τον τύπο:

$$S_\nu = \alpha_1 \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$$

Άρα: $$P(0)=1-\left(\frac{1}{2}\,\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{100}-1}{\frac{1}{2}-1}\right)=1+\left(\frac{1}{2}\right)^{100}-1=\frac{1}{2^{100}}$$

7. **Αν Α, Β ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω και P(A) = 3/4 και P(B) = 3/8 να δείξετε ότι: α) Α, Β όχι ασυμβίβαστα β) $P(A \cup B) \geq 3/4$ γ) $1/8 \leq P(A \cap B) \leq 3/8$**

Λύση:

α) Έστω Α, Β ασυμβίβαστα, τότε $A \cap B = \varnothing$.

Άρα: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{3}{4} + \frac{3}{8} = \frac{9}{8} > 1$ ΑΤΟΠΟ Άρα $A \cap B \neq \varnothing$

β) $A \subseteq A \cup B \Rightarrow P(A) \leq P(A \cup B) \Rightarrow 3/4 \leq P(A \cup B)$
$B \subseteq A \cup B \Rightarrow P(B) \leq P(A \cup B) \Rightarrow 3/8 \leq P(A \cup B)$
$\Rightarrow 3/4 \leq P(A \cup B)$

γ) $A \cap B \subseteq B \Rightarrow P(A \cap B) \leq P(B) \Rightarrow P(A \cap B) \leq 3/8$
$A \cap B \subseteq A \Rightarrow P(A \cap B) \leq P(A) \Rightarrow P(A \cap B) \leq 3/4$
$\Rightarrow P(A \cap B) \leq 3/8$

Επίσης 7ω$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Άρα: $P(A \cup B) = \frac{3}{4} + \frac{3}{8} - P(A \cap B)$, δηλαδή: $P(A \cup B) = \frac{9}{8} - P(A \cap B)$

όμως $0 \leq P(A \cup B) \leq 1$

Άρα: $\frac{9}{8} - P(A \cap B) \leq 1 \iff \frac{1}{8} \leq P(A \cap B)$

8. Αν Α, Β ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω και P(A), P(B) ρίζες της εξίσωσης: $6x^3 + 5x^2 - 12x + 4 = 0$ με P(A) < P(B) να δείξετε ότι:

α) Α, Β όχι ασυμβίβαστα **β) $1/6 \leq P(A \cap B) \leq 1/2$** **γ) $2/3 \leq P(A \cup B) \leq 1$**

Λύση:

α) $6x^3 + 5x^2 - 12x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(6x^2 - 7x + 2) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = -2 \text{ ή } 6x^2 - 7x + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{3} \\ x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Άρα $P(A) = \dfrac{1}{2}$ και $P(B) = \dfrac{2}{3}$

Έστω $A \cap B = \varnothing$ τότε $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{7}{6} > 1$ ΑΤΟΠΟ. Άρα $A \cap B \neq \varnothing$

β) $\left.\begin{aligned} &A \cap B \subseteq B \Rightarrow P(A \cap B) \leq P(B) \text{ άρα: } P(A \cap B) \leq 2/3 \\ &A \cap B \subseteq A \Rightarrow P(A \cap B) \leq P(A) \text{ άρα: } P(A \cap B) \leq 1/2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow P(A \cap B) \leq 1/2$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ άρα: $P(A \cup B) = 7/6 - P(A \cap B)$

Όμως $0 \leq P(A \cup B) \leq 1$. Άρα: $7/6 - P(A \cap B) \leq 1 \Leftrightarrow 7/6 - 1 \leq P(A \cap B)$

Άρα: $1/6 \leq (A \cap B)$

γ) $P(A \cup B) \leq 1$ ισχύει για κάθε ζευγάρι ενδεχομένων Α, Β.

$\left.\begin{aligned} &A \subseteq A \cup B \Rightarrow P(A) \leq P(A \cup B) \Rightarrow 1/2 \leq P(A \cup B) \\ &B \subseteq A \cup B \Rightarrow P(B) \leq P(A \cup B) \Rightarrow 2/3 \leq P(A \cup B) \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2/3 \leq P(A \cup B)$

9. Αν Χ ενδεχόμενο του δειγματικού χώρου Ω και , $|P(X)+2| - |P(X)-3| = 8\lambda$, $\lambda \in R$ να δείξετε ότι $|\lambda| \leq \dfrac{1}{8}$.

Λύση:

Ισχύει $0 \leq P(X) \leq 1 \Leftrightarrow 2 \leq P(X) + 2 \leq 3$, Άρα: $|P(x) + 2| = P(x) + 2$

Επίσης $0 \leq P(X) \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq P(X) - 3 \leq -2$, Άρα: $|P(x) - 3| = -P(x) + 3$

Άρα: $P(X) + 2 - (-P(X) + 3) = 8\lambda \Leftrightarrow P(X) + 2 + P(X) - 3 = 8\lambda \Leftrightarrow 2P(X) = 8\lambda + 1 \Leftrightarrow P(x) = \dfrac{8\lambda + 1}{2}$

Όμως: $0 \leq P(X) \leq 1$, Όμως: $0 \leq \frac{8\lambda+1}{2} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 8\lambda + 1 \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq 8\lambda \leq 1 \Leftrightarrow -1/8 \leq \lambda \leq 1/8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |\lambda| \leq \frac{1}{8}$

10. Αν Α, Β, Γ ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω να δείξετε ότι:
α) $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$ β) $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B) + P(\Gamma)$

Λύση:

α) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$.

Όμως: $0 \leq P(A \cap B) \leq 1$, άρα: $0 \leq P(A) + P(B) - P(A \cup B)$.

Άρα: $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$.

β) $P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A \cup (B \cup \Gamma)) \leq P(A) + P(B \cup \Gamma)$ (λόγω α)

Όμως: $P(B \cup \Gamma) \leq P(B) + P(\Gamma)$ (λόγω α)

Άρα: $P(A \cup B \cup \Gamma) + P(B \cup \Gamma) \leq P(A) + P(B \cup \Gamma) + P(B) + P(\Gamma)$

Επομένως: $P(A \cup B \cup \Gamma) \leq P(A) + P(B) + P(\Gamma)$

11. Η πιθανότητα να μη λύσει ένας μαθητής ένα πρόβλημα πιθανοτήτων είναι διπλάσια από την πιθανότητα να το λύσει. Να βρεθεί η πιθανότητα να λύσει ο μαθητής το πρόβλημα.

Λύση:

Έστω: Α: ο μαθητής λύνει το πρόβλημα, και: Α΄: ο μαθητής δε λύνει το πρόβλημα.

Είναι: $\left.\begin{array}{l} P(A') = 1 - P(A) \\ P(A') = 2P(A) \end{array}\right\} \Rightarrow 1 - P(A) = 2P(A) \Leftrightarrow 3P(A) = 1 \Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{3}$

12. Αν Α, Β ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω να δείξετε ότι:
$2P(A)\,P(B) \leq P(A \cup B) + P(A \cap B)$

Λύση:

Επειδή $0 \leq P(A) \leq 1 \Rightarrow P(B)\,P(A) \leq P(B)$

Επίσης $0 \leq P(B) \leq 1 \Rightarrow P(A)\,P(B) \leq P(A)$

Άρα (με πρόσθεση κατά μέλη): $2P(A)\,P(B) \leq P(A) + P(B)$

Όμως: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$

Άρα: $2P(A)\,P(B) \leq P(A \cup B) + P(A \cap B)$

13. Αν $0 < P(A) < 1$ να δείξετε ότι: $\frac{1}{P(A)} + \frac{1}{P(A')} \geq 4$.

Λύση:

$\frac{1}{P(A)} + \frac{1}{P(A')} \geq 4 \Leftrightarrow \frac{P(A') + P(A)}{P(A')P(A)} \geq 4 \Leftrightarrow P(A') + P(A) \geq 4P(A)\,P(A') \Leftrightarrow$

$1 \geq 4P(A)\,[1 - P(A)] \Leftrightarrow 1 \geq 4P(A) - 4P^2(A) \Leftrightarrow 4P^2(A) - 4P(A) + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (2P(A) - 1)^2 \geq 0$ που ισχύει.

14. Αν Α, Β ενδεχόμενα του Ω να δείξετε ότι:
α) $P(A) + P(B) \leq 1 + P(A \cap B)$ β) $P(A) + P(B) \leq 1 + P(A \cup B)$

Λύση:

α) $P(A) + P(B) \leq 1 + P(A \cup B) \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cup B) \leq 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ (από προσθετικό νόμο) $P(A \cap B) \leq 1$ που ισχύει.

β) $P(A) + P(B) \leq 1 + P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ (από προσθετικό νόμο) $P(A \cap B) \leq 1$ που ισχύει.

15. Αν Α, Β ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω να δείξετε ότι $P(A) - P(B') = P(B) - P(A')$.

Λύση:

$P(A) + P(A)' = P(B) + P(B') \Leftrightarrow P(A) - P(B') = P(B) - P(A')$

16. Έστω Ω δειγματικός χώρος που αποτελείται από το σύνολο των ριζών της εξίσωσης $(x - 10)(x - 11) \ldots (x - 20) = 0$. Αν Ω αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και $\lambda \in \Omega$, να βρεθεί η πιθανότητα η εξίσωση $y^2 - 8y + \lambda = 0$ να μην έχει πραγματικές ρίζες.

Λύση:

Αφού Ω αποτελείται από το σύνολο των ριζών της εξίσωσης: $(x - 10)(x - 11) \ldots (x - 20) = 0$ τότε: $\Omega = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$.
Η εξίσωση: $y^2 - 8y + \lambda = 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες όταν $\Delta < 0$. Αρα:
$(-8)^2 - 4\lambda < 0 \Leftrightarrow 64 - 4\lambda < 0 \Leftrightarrow -4\lambda < -64 \Leftrightarrow \lambda > 16$
Αφού $\lambda \in \Omega$ για να μην έχει πραγματικές ρίζες η εξίσωση πρέπει να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο $A = \{17, 18, 19, 20\}$.

Άρα: $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{4}{10} = 0,4$

17. Για τρία οποιαδήποτε ενδεχόμενα Α, Β, Γ του δειγματικού χώρου Ω να δείξετε ότι:
α) $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$ β) $P(A \cap B \cap \Gamma) \geq P(A) + P(B) + P(\Gamma) - 2$.

Λύση:

α) Γνωρίζουμε ότι $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ επίσης: $0 \leq P(A \cup B) \leq 1$

Άρα: $P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1$

Άρα: $P(A) + P(B) - 1 \leq P(A \cap B)$.

β) $P(A \cap B \cap \Gamma) = P((A \cap B) \cap \Gamma) \geq P(A \cap B) + P(\Gamma) - 1$ (λόγω α)

Επίσης $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$ (λόγω α)

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

$P(A \cap B \cap \Gamma) + P(A \cap B) \geq P(A \cap B) + P(\Gamma) - 1 + P(A) + P(B) - 1$

Άρα $P(A \cap B \cap \Gamma) \geq P(A) + P(B) + P(\Gamma) - 2$

18. Ένα κουτί περιέχει 2 κόκκινες και 3 πράσινες μπάλες. Αν πάρουμε στην τύχη δύο από αυτές να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:
α) Α: οι μπάλες είναι του ίδιου χρώματος. β) Β: οι μπάλες είναι διαφορετικού χρώματος.

Λύση:

Αν οι δύο κόκκινες είναι Κ1, Κ2 και οι τρεις πράσινες είναι Π1, Π2, Π3 τότε ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι:

Ω = {Κ1Κ2, Κ1Π1, Κ1Π2, Κ1Π3, Κ2Π1, Κ2Π2, Κ2Π3, Π1Π2, Π1Π3, Π2Π3} με N(Ω) = 10.

Α = {Κ1Κ2, Π1Π2, Π1Π3, Π2Π3} με N(A) = 4. Άρα: $P(A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

Β = {Κ1Π1, Κ1Π2, Κ1Π3, Κ2Π1, Κ2Π2, Κ2Π3} με N(B) = 6. Άρα: $P(B) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

19. Αν Ω = {0, 1, 2, 3, 4, 5, ..., 20} να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:
Α: τα στοιχεία του Ω που διαιρούνται με το 2. Β: τα στοιχεία του Ω που διαιρούνται με το 5.
Γ: τα στοιχεία του Ω που διαιρούνται με το 5 και το 2.

Λύση:

Α = {0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20} $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{11}{21}$

Β = {0, 5, 10, 15, 20} $P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{5}{21}$

$\Gamma = A \cap B$ = {0, 10, 20} $P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{3}{21}$

20. Αν $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$ και $\lambda \in \Omega$ και $f(x) = \lambda x^4 + \lambda^2 x^2 - 5$, να βρεθεί η πιθανότητα η γραφική παράσταση της f να έχει στο σημείο (1, f(1)) εφαπτομένη παράλληλη με τον x΄x.

Λύση:

Α: η εφαπτομένη της C_f στο (1, f(1)) είναι παράλληλη στον x΄x.

$f(x) = \lambda x^4 + \lambda^2 x^2 - 5$ $\qquad$ $f'(x) = 4\lambda x^3 + 2\lambda^2 x$

Για να έχει η γραφική παράσταση της f στο σημείο (1, f(1)) εφαπτομένη παράλληλη στον x΄x πρέπει:

$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 4\lambda 1^3 + 2\lambda^2 1 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda(2 + \lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ ή $\lambda = -2$

Άρα: $A = \{0\}$

Άρα: $P(A) = \frac{1}{4}$

Ερωτήσεις Σωστό – Λάθος.

Να χαρακτηρίσετε σαν σωστές ή λάθος τις παρακάτω προτάσεις και να αιτιολογήσετε την άποψή σας σε κάθε περίπτωση.

1. Αν Α είναι ενδεχόμενο δειγματικού χώρου Ω ισχύει $P(A) = N(A) / N(\Omega)$.

Σ ( ) Λ ( )

Διότι: ....

....

2. Αν $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\nu\}$ δειγματικός χώρος τότε: $P(\omega_1) + P(\omega_2) + ... + P(\omega_\nu) = 1$.

Σ ( ) Λ ( )

Διότι: ....

....

3. Αν Α, Β ενδεχόμενα δειγματικού χώρου Ω τότε είναι δυνατόν να ισχύει: $P(A) + P(B) = 0$.

Σ ( ) Λ ( )

Διότι: ....

....

4. Η πιθανότητα ενός βέβαιου ενδεχόμενου ισούται με 1.

Σ ( ) Λ ( )

Διότι: ....

....

5. Οι ρίζες της εξίσωσης $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ είναι οι πιθανότητες ενδεχομένου ενός πειράματος τύχης.

Σ ( ) Λ ( )

Διότι: ....

....

6. Σε ένα πείραμα τύχης όλα τα απλά ενδεχόμενα είναι πάντα ισοπίθανα.

Σ ( ) Λ ( )

Διότι: ....

....

7. Αν για τα ενδεχόμενα Α, Β δειγματικού χώρου Ω ισχύει $N(A) = N(B)$ τότε: $P(A) = P(B)$.

Σ ( ) Λ ( )

Διότι: ....

....

8. Αν για τα ενδεχόμενα Α, Β δειγματικού χώρου Ω ισχύει $A \subseteq B$, τότε: $P(A) < P(B)$.

Σ ( ) Λ ( )

Διότι: ....

....

9. Η πιθανότητα να τραβήξουμε φιγούρα από μία τράπουλα 52 φύλλων είναι μεγαλύτερη από το να τραβήξουμε σπαθί.

Σ ( ) Λ ( )

Διότι: ....

....

10. Έστω μία τράπουλα 52 φύλλων. Τραβάμε τυχαία ένα χαρτί. Τα ενδεχόμενα: Α: το χαρτί είναι καρό, Β: το χαρτί είναι άσσος, είναι ασυμβίβαστα.

Σ ( ) Λ ( )

Διότι: ....

....

11. Για δύο ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει: $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$.

Σ ( ) Λ ( )

Διότι: ....

....

12. Για δύο ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει: $P(A \cap B) \leq P(A) \leq P(A \cup B)$.

Σ ( ) Λ ( )

Διότι: ....

....

13. Ένα κουτί περιέχει κόκκινες, πράσινες, λευκές και μαύρες σφαίρες. Επιλέγουμε τυχαία δύο σφαίρες. Η πιθανότητα να επιλέξουμε μία κόκκινη σφαίρα δεν αλλάζει αν η διαδικασία πραγματοποιηθεί με ή χωρίς επανατοποθέτηση των σφαιρών.

Σ ( ) Λ ( )

Διότι: ....

....

14. Ένα κουτί περιέχει κόκκινες, πράσινες, λευκές και μαύρες σφαίρες. Επιλέγουμε τυχαία δύο σφαίρες. Ο δειγματικός χώρος Ω δεν αλλάζει αν οι σφαίρες επιλέγονται διαδοχικά ή ταυτόχρονα.

Σ ( ) Λ ( )

Διότι: ....

....

15. **Δύο αντίθετα ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω είναι πάντα ασυμβίβαστα.**

Σ ( ) Λ ( )

Διότι: ....

..

16. **Δυο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω είναι πάντα αντίθετα.**

Σ ( ) Λ ( )

Διότι: ....

..

17. **Αν Α, Β ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω και $A \subseteq B$ τότε $P(A') \geq P(B')$.**

Σ ( ) Λ ( )

Διότι: ....

..

18. **Αν Α, Β ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω τότε $P(A \cup B) \leq P(A \cap B)$.**

Σ ( ) Λ ( )

Διότι: ....

..

19. **Αν Α ενδεχόμενο του δειγματικού χώρου Ω τότε $P(A') \geq P(\Omega)$.**

Σ ( ) Λ ( )

Διότι: ....

..

20. **Αν Α, Β ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω τότε $P(A - B) + P(A \cap B) = P(A)$.**

Σ ( ) Λ ( )

Διότι: ....

..

Ερωτήσεις Πολλαπλής Επιλογής.

1. Αν Α, Β ενδεχόμενα δειγματικού χώρου Ω και $A \cap B \neq \varnothing$ ποια σχέση από τις παρακάτω είναι σωστή;

α) $P(A) \leq P(A \cap B')$
β) $P(A \cup B) \leq P(A \cap B)$
γ) $P(A \cup B) + P(A \cap B) < P(A) + P(B)$
δ) $P(A) \leq P(A \cap B)$
ε) Καμία από τις παραπάνω δεν είναι σωστή.

2. Αν Α, Β ενδεχόμενα δειγματικού χώρου Ω και $P(A) = 1/4$ και $P(A \cup B) = 1/2$, τότε η $P(B)$ θα είναι:

α) 1/2 β) 1/4 γ) 0 δ) 1/8 ε) κανένα από τα παραπάνω

3. Σε δυο διαδοχικές ρίψεις ενός ζαριού η πιθανότητα να φέρουμε τον ίδιο αριθμό είναι:

α) 1/36 β) 1/6 γ) 12/36 δ) 4/36 ε) κανένα από τα παραπάνω

4. Αν $P(A) \leq P(B)$, τότε:

α) $A \subseteq B$ β) $B \subseteq A$ γ) $A = B$ δ) $A \cap B = \varnothing$
ε) τίποτε από τα προηγούμενα

5. Αν Α ένα ενδεχόμενο δειγματικού χώρου Ω, τότε:

α) $0 < P(A) < 1$
β) $0 \leq P(A) \leq 1$
γ) $-1 \leq P(A) \leq 1$
δ) $-1 < P(A) < 1$
ε) τίποτε από τα προηγούμενα

6. Αν Α ένα ενδεχόμενο δειγματικού χώρου Ω και $P(A) = 1/3$ τότε η $P(A')$ θα είναι:

α) 1/3 β) 1 γ) 2/3 δ) -1/3 ε) τίποτε από τα προηγούμενα

7. Αν Αν Α, Β ενδεχόμενα δειγματικού χώρου Ω και $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}2$ και $P(A \cap B) = 0{,}1$ η πιθανότητα να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα Α, Β θα είναι:

α) 0,4 β) 0,6 γ) 0,9 δ) 0,1 ε) τίποτε από τα προηγούμενα

8. Αν δύο ενδεχόμενα Α, Β δειγματικού χώρου Ω είναι ασυμβίβαστα, τότε:

α) $P(A \cap B) = 1$
β) $P(A \cup B) = 1$
γ) $P(A \cap B) = O$
δ) $P(A) + P(B) = 1$
ε) τίποτε από τα προηγούμενα

9. Αν Α ένα ενδεχόμενο δειγματικού χώρου Ω, τότε:

α) $P(A) = P(A')$
β) $P(A) > P(A')$
γ) $P(A) < P(A')$
δ) $P(A) + P(A') = P(\Omega)$
ε) τίποτε από τα προηγούμενα

10. Έστω το πείραμα ρίψης ενός ζαριού και Α το ενδεχόμενο να φέρουμε άρτιο αριθμό, τότε:

α) $P(A) = P(A')$
β) $P(A) > P(A')$
γ) $P(A) < P(A')$
δ) $P(A) + P(A') = 1/2$
ε) τίποτε από τα προηγούμενα

Ασκήσεις Αντιστοίχισης.

Ο Γιάννης έχει στην ντουλάπα του:
Τρία παντελόνια: ένα μαύρο (Μ), ένα λευκό (Λ) και ένα πράσινο (Π).
Τρία πουκάμισα : ένα κίτρινο (Κ), ένα θαλασσί (Θ) και ένα λευκό (Λ).
Δυο σακάκια: ένα μαύρο (Μ) και ένα πράσινο (Π).
Να αντιστοιχίσετε τα ενδεχόμενα της στήλης Α με τις πιθανότητες της στήλης Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
1. Ο Γιάννης θα φορέσει μαύρο σακάκι.	α. P(A) = 0
2. Ο Γιάννης δεν θα φορέσει ρούχα του ίδιου χρώματος.	β. P(A) = 1/6
3. Ο Γιάννης δεν θα φορέσει ρούχα πράσινου χρώματος.	γ. P(A) = 1/2
4. Ο Γιάννης θα φορέσει κόκκινο παντελόνι.	δ. P(A) = 1/3
5. Ο Γιάννης θα φορέσει λευκό πουκάμισο και πράσινο σακάκι.	ε. P(A) = 5/9
	στ. P(A) = 1
	ζ. P(A) = 1/4

Αλυτες ασκήσεις.

1. Έστω Α, Β δυο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω και $P(A) = 1/3$, $P(B) = 1/4$. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία ανήκουν οι πιθανότητες $P(A \cup B)$ και $P(A \cap B)$.

2. Από μία τράπουλα 52 φύλλων τραβάμε τυχαία ένα φύλλο. Να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων:

   α) το φύλλο είναι άσσος β) το φύλλο είναι φιγούρα γ) το φύλλο είναι σπαθί

   Αν αφαιρέσουμε από την τράπουλα τη ντάμα σπαθί, να υπολογίσετε ξανά τις παραπάνω πιθανότητες.

3. Στον παρακάτω πίνακα διπλής εισόδου φαίνεται η κατάσταση υγείας ενός ασθενούς ανάλογα με το φύλο. Αν επιλέξουμε τυχαία έναν ασθενή, να βρείτε την πιθανότητα:

Φύλο / Κ.Υ.	Κακή	Μέτρια	Καλή	Άριστη
♂ (Α)	13	12	9	4
♀ (Γ)	8	16	6	8

   α) να είναι άνδρας
   β) να μην έχει κακή υγεία
   γ) να έχει άριστη υγεία
   δ) αν είναι άνδρας να έχει μέτρια υγεία
   ε) αν έχει άριστη υγεία να είναι γυναίκα

4. Ένα κουτί περιέχει 4 μαύρες σφαίρες, 4 κόκκινες, 3 λευκές αλλά δεν ξέρουμε πόσες πράσινες. Τραβάμε στη τύχη μια σφαίρα. Έστω τα ενδεχόμενα:
   Α : Η σφαίρα είναι κόκκινη. Β : Η σφαίρα είναι λευκή ή πράσινη.
   Γ : Η σφαίρα δεν είναι πράσινη.
   Να βρείτε πόσες πράσινες σφαίρες έχει το κουτί αν:
   α) $P(A) = 1/4$ β) $P(B) = 1/2$ γ) $P(Γ) = 1/2$

5. Να βρείτε την πιθανότητα από μία τράπουλα 52 φύλλων να τραβήξουμε στην τύχη:
   α) μια κόκκινη φιγούρα β) ένα μαύρο δέκα
   γ) ένα μαύρο φύλλο με περιττό αριθμό (οι φιγούρες θεωρούνται άρτιοι)

6. Σε ένα σχολείο βρέθηκε ότι 1 στους 3 μαθητές δεν έχει κάνει εμβόλιο ηπατίτιδας, 1 στους 4 μαθητές δεν έχει επισκεφθεί ποτέ οδοντογιατρό, ενώ 1 στους 10 μαθητές δεν έχει κάνει ούτε εμβόλιο, ούτε έχει πάει στον οδοντογιατρό. Να βρεθεί η πιθανότητα κάποιος μαθητής να έχει κάνει και εμβόλιο και να έχει πάει στον οδοντογιατρό.

7. Τέσσερις παίκτες Α, Β, Γ, Δ παίζουν χαρτιά. Αν ο παίκτης Β έχει διπλάσια πιθανότητα να κερδίσει από τον Α και ο Γ έχει πιθανότητα να κερδίσει όσο οι δυο προηγούμενοι μαζί, να βρείτε την πιθανότητα να κερδίσει ο Δ όταν $P(A) = 0,1$.

8. Τρεις παίκτες Α, Β, Γ, παίζουν ένα παιχνίδι. Ο παίκτης Α έχει διπλάσια πιθανότητα να κερδίσει από τον Β ενώ ο Γ 20% μικρότερη πιθανότητα από τον Β. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες νίκης του κάθε παίκτη.

9. Η πιθανότητα να επιτύχει ένας μαθητής στα Μαθηματικά είναι τριπλάσια από την πιθανότητα να αποτύχει. Βρείτε την πιθανότητα να πετύχει.

10. Έστω Α, Β δυο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω και $P(A') = 1/2$, $P(A \cap B) = 5/12$ και $P(A \cup B) = 1/4$. Να βρείτε τις πιθανότητες: $P(B)$, $P(A)$, $P(A' \cup B')$, $P(A \cap B)'$, $P(A' \cap B')$.

11. Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω δείξτε ότι αν $P(A) + P(B) > 1$ τα ενδεχόμενα δεν είναι ασυμβίβαστα.

12. Έστω Α, Β δυο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω και $P(A) = 3/5$ και $P(B) = 4/5$.
α) Εξετάστε αν τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ασυμβίβαστα
β) Δείξτε ότι $0 < P(A \cap B) \leq 3/5$ γ) Δείξτε ότι $4/5 < P(A \cup B) \leq 1$

13. Έστω Α, Β, Γ τρία ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω και $P(A) = 2/3$ και $P(B) = 3/4$ και $P(\Gamma) = 4/5$. Εξετάστε ανά δυο τα ενδεχόμενα αν είναι ασυμβίβαστα.

14. Αν $\Omega = \{1,2, ..., 25\}$ τι πιθανότητα έχουμε να επιλέξουμε τυχαία έναν αριθμό και να είναι πρώτος; Τι πιθανότητα έχουμε ο αριθμός που επιλέξαμε να μη διαιρείται με το 3;
Σημείωση: Ένας θετικός ακέραιος ονομάζεται πρώτος αν έχει μοναδικούς διαιρέτες τον εαυτό του και τη μονάδα.

15. Ποια είναι η πιθανότητα ο φυσικός αριθμός x με $1 \leq x \leq 100$ να διαιρείται:
α) Με το 2 β) Με το 2 και το 3 γ) Με το 2 το 3 και το 5

16. Σε ένα χωριό 90 κατοίκων μετά από έρευνα βρέθηκε ότι: α) Οι 50 είναι άνδρες από τους οποίους οι μισοί είναι ηλικιωμένοι, β) Οι 60 είναι ηλικιωμένοι.
Αν επιλέξουμε ένα κάτοικο τυχαία να βρείτε την πιθανότητα:
α) Να είναι άνδρας ή ηλικιωμένος, β) Να μην είναι ούτε άνδρας ούτε ηλικιωμένος,
γ) Να είναι μόνο άνδρας ή μόνο ηλικιωμένος.

17. Ένα κουτί περιέχει 3 αριθμημένες σφαίρες και μια ακόμη μαύρη. Παίρνουμε τυχαία μια σφαίρα κάθε φορά χωρίς να την επανατοποθετήσουμε. Αν τραβήξουμε τη μαύρη το πείραμα σταματά. Ποια είναι η πιθανότητα να τραβήξουμε 3 σφαίρες;

18. Αν Α, Β ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω, να δειχθεί ότι:
α) $P(A \cap B) + P(A - B) \leq 1$ β) $[P(A \cap B)]^2 - [P(A - B)]^2 \leq 1 - 2P(A - B)$

19. Αν Α, Β ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω με $A \cap B = \varnothing$, να δείξετε ότι:
$2P^2(A) + 2P^2(B) \geq 2P(A \cup B) - 1$

20. Αν Α, Β ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω, να δείξετε ότι:
α) $P(A - B) = P(A \cup B) - P(B)$ β) $P(B - A) = P(A \cup B) - P(A)$

21. Αν Α, Β ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω με $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$ να δείξετε ότι:
$\frac{P(A)}{P(B)} + \frac{P(B)}{P(A)} \geq 2$.

22. Αν Α, Β ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω να δείξετε ότι: $P(A) - P(B') \leq P(A \cap B)$.

23. Αν οι P(A) και P(B) είναι δύο από τις ρίζες της εξίσωσης $6x^3 - 31x^2 + 30x - 8 = 0$ να δείξετε ότι: α) $P(A \cap B) \neq 0$ β) $1/6 \leq P(A \cap B) \leq 1/2$

24. Η πιθανότητα να επιλεγεί ένας μαθητής για την ομάδα ποδοσφαίρου του σχολείου είναι 1/6 ενώ για την ομάδα μπάσκετ 1/5. Η πιθανότητα να εκλεγεί και στις δύο ομάδες είναι 1/10. Ποια είναι η πιθανότητα των ενδεχομένων:
Να επιλεγεί τουλάχιστον σε μία από τις δύο ομάδες;
Να επιλεγεί μόνο στην ομάδα ποδοσφαίρου;
Να επιλεγεί μόνο σε μία από τις δύο ομάδες;

25. Δύο μαθητές ο α και ο β λύνουν μία άσκηση πιθανοτήτων. Η πιθανότητα να τη λύσει τουλάχιστον ένας από τους δύο είναι 3/4 ενώ η πιθανότητα να τη λύσουν και οι δύο είναι 1/4. Αν γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα να μη λύσει την άσκηση ο α μαθητής είναι 2/3 να υπολογιστούν:
i) Η πιθανότητα να λύσει την άσκηση ο μαθητής α.
ii) Η πιθανότητα να λύσει την άσκηση ο μαθητής β.
iii) Η πιθανότητα να λύσει την άσκηση μόνο ο μαθητής α.

26. Για δύο ενδεχόμενα Α, Β γνωρίζουμε ότι έχουν την πιθανότητα: P(A) = 3/4, P(B) = 3/8. Να δειχθεί ότι:
i) Α, Β συμβιβαστά ενδεχόμενα. ii) $1 \geq P(A \cup B) \geq 3/4$ iii) $1/8 \leq P(A \cap B) \leq 3/8$

27. Έστω Α, Β ενδεχόμενα δειγματικού χώρου Ω. Δείξτε ότι ισχύει:
$P(A \cap B) - P(A)P(B) = P(A)P(B') - P(A - B)$.

28. **Εξετάστε αν υπάρχουν ενδεχόμενα Α, Β δειγματικού χώρου Ω ώστε να ισχύει: $P(A) = 5/6$, $P(B) = 3/4$ και $P(A' \cap B') = 5/8$.**

29. **Έστω δειγματικός χώρος $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ και τα ενδεχόμενα $A = \{\omega_1, \omega_2\}$ με $P(A) = 1/4$, $B = \{\omega_2, \omega_3\}$ με $P(B) = 1/8$ και $\Gamma = \{\omega_2\}$ με $P(\Gamma) = 1/12$. Να υπολογίσετε την $P(\omega_4)$.**

30. **Έστω δειγματικός χώρος $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ και τα ενδεχόμενα $A = \{\omega_1, \omega_2\}$, $B = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}$. Αν $P(A) = P(\omega_3)$, $P(B) = 10P(\omega_1)$ και $P(A' \cap B) = 8/11$ να υπολογίσετε τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του δειγματικού χώρου.**

31. **Έστω Α, Β ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω και $P(B) = 7/15$ και $P(A \cap B') = 2/15$. Να υπολογίσετε την $P(A \cup B)$.**

32. **Έστω Α, Β ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω. Αν οι πιθανότητες $P(A \cup B)$, $P(A \cap B)$ είναι ρίζες της εξίσωσης $6x^3 + x^2 - 4x + 1 = 0$ να βρεθεί η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα Α, Β.**

33. **Πέντε μονοψήφιοι θετικοί ακέραιοι αριθμοί αποτελούν ένα δείγμα. Τέσσερις από αυτούς είναι οι 1, 3, 6, 8. Αν δ η διάμεσος του δείγματος να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων: Α: $\delta = 3$ Β: $\delta = 6$ Γ: $\delta = 5$ Δ: $\delta = 8$**

3.3 Συνδυαστική και Πιθανότητες

Απαραίτητες γνώσεις Θεωρίας

Θεωρία 1.

α) Τι αναφέρει η Βασική Αρχή της Απαρίθμησης;
β) Πως διαβάζεται και με τι είναι ίσο το ν! ;

Απάντηση:

α) I) Αν μία διαδικασία μπορεί να χωριστεί σε δύο διαδοχικές φάσεις έτσι ώστε η πρώτη φάση να μπορεί να εκτελεστεί με μ τρόπους και η δεύτερη με ν τρόπους, τότε η διαδικασία αυτή μπορεί να εκτελεστεί με μ · ν τρόπους.

Παράδειγμα 1:
Πόσοι διψήφιοι θετικοί αριθμοί ακέραιοι μπορούν να σχηματιστούν;
Τα ψηφία με τα οποία σχηματίζουμε τους θετικούς ακέραιους είναι τα : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

	Δεκάδες	Μονάδες
Τρόποι	9	10
Άρα: 9 · 10 = 90 Διψήφιοι		

II) Γενικότερα: Αν μία διαδικασία μπορεί να πραγματοποιηθεί σε ν διαδοχικές φάσεις $φ_1$, $φ_2$ ..., $φ_ν$. Αν η φάση $φ_1$ μπορεί να πραγματοποιηθεί με $κ_1$ τρόπους και για καθέναν από αυτούς η φάση $φ_2$ μπορεί να πραγματοποιηθεί με $κ_2$ τρόπους ,..., και για καθέναν από όλους αυτούς τους τρόπους η φάση $φ_ν$ μπορεί να πραγματοποιηθεί με $κ_ν$ τρόπους, τότε η διαδικασία αυτή μπορεί να πραγματοποιηθεί με $κ_1 \cdot κ_2 ... κ_ν \cdot$ τρόπους.

Παράδειγμα 2:
Πόσοι τετραψήφιοι θετικοί ακέραιοι μπορούν να σχηματιστούν;

	Χιλιάδες	Εκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες
Τρόποι	9	10	10	10
Άρα: 9 · 10 · 10 · 10 = 9.000 Τετραψήφιοι				

β) Το ν! διαβάζεται ν - παραγοντικό και ισχύει: $\nu! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot (\nu - 1) \cdot \nu$.
Επίσης συμφωνούμε να ορίζουμε $1! = 1$ και $0! = 1$.

Θεωρία 2.

α) Τι ονομάζουμε διάταξη των ν στοιχείων ενός συνόλου Α ανά κ με $\kappa \leq \nu$;
β) Υπάρχει «τύπος» υπολογισμού των διατάξεων των ν στοιχείων ενός συνόλου ανά κ;

Απάντηση:

α) Διάταξη των ν στοιχείων ενός συνόλου Α ανά κ, με $\kappa \leq \nu$, λέγεται καθένας από τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορούμε να πάρουμε κ διαφορετικά στοιχεία του Α και να τα βάλουμε σε μία σειρά.
(Δηλαδή όλες τις διαφορετικές διατεταγμένες κ - άδες που μπορούμε να σχηματίσουμε).

Παράδειγμα 3:
Πόσες διαφορετικές τριάδες νικητών (Χρυσό - Αργυρό - Χάλκινο) μπορούμε να πάρουμε σε ένα αγώνα δρόμου 400 m στον οποίο συμμετέχουν 8 αθλητές;

Απάντηση:

Με τη Βασική Αρχή της Απαρίθμησης:

	Χρυσό	Αργυρό	Χάλκινο
Τρόποι	8	7	6
Άρα: 8 · 7 · 6 = 336 Διαφορετικές τριάδες νικητών			

β) Αν συμβολίσουμε με Δ^{ν}_{κ} τις διατάξεις των ν στοιχείων ανά κ τότε με τη Βασική Αρχή της Απαρίθμησης έχουμε:

	1η Θέση	2^{η} Θέση	3^{η} Θέση	•••	κ^{η} Θέση
Τρόποι	ν	ν - 1	ν - 2	•••	ν - κ + 1

Άρα: $\Delta_\kappa^\nu = \nu(\nu-1)(\nu-2)..(\nu-\kappa+1) = \dfrac{\nu(\nu-1)(\nu-2)...(\nu-\kappa+1)(\nu-\kappa)(\nu-\kappa-1)...3\cdot 2\cdot 1}{(\nu-\kappa)(\nu-\kappa-1)....3\cdot 2\cdot 1} = \dfrac{\nu!}{(\nu-\kappa)!}$

Άρα: $\boxed{\Delta_\kappa^\nu = \dfrac{\nu!}{(\nu-\kappa)!}}$

Θεωρία 3.

α) Πότε δύο διατάξεις των ν στοιχείων ενός συνόλου Α ανά κ είναι διαφορετικές;
β) Τι ονομάζουμε μετάθεση των ν στοιχείων ενός συνόλου Α;
γ) Υπάρχει «τύπος» υπολογισμού των μεταθέσεων των ν στοιχείων ενός συνόλου Α;

Απάντηση:

α) Δύο διατάξεις των ν στοιχείων ενός συνόλου Α ανά κ είναι διαφορετικές αν διαφέρουν ως προς ένα τουλάχιστον στοιχείο ή αν διαφέρουν στη θέση που κατέχουν τα στοιχεία τους, π.χ. Διαφορετικές διατεταγμένες τριάδες είναι:
Ι) (α, β, γ) και (α, β, δ) **ΙΙ)** (α, β, γ) και (β, α, γ)

β) Μετάθεση των ν στοιχείων ενός συνόλου Α ονομάζουμε όλες τις διαφορετικές διατεταγμένες ν-άδες που μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ν στοιχεία του συνόλου Α.

γ) Αν συμβολίσουμε με M_ν τις μεταθέσεις ν στοιχείων του συνόλου Α τότε με τη βοήθεια της Βασικής Αρχής της Απαρίθμησης έχουμε:

	1η Θέση	2η Θέση	•••	ν - 1 Θέση	ν Θέση
Τρόποι	**ν**	**ν - 1**	•••	**2**	**1**
Άρα: Μν = ν · (ν - 1) ... 2 · 1. Άρα: $\boxed{M_\nu = \nu!}$					

Σχόλιο: $M_\nu = \Delta_\nu^\nu$ διότι: $\Delta_\nu^\nu = \dfrac{\nu!}{(\nu-\nu)!} = \dfrac{\nu!}{0!} = \dfrac{\nu!}{1} = \nu!$

Παράδειγμα 4:
Με πόσους τρόπους μπορούμε να βάλουμε στη σειρά 5 μαθητές;

	1η Θέση	2η Θέση	3η Θέση	4η Θέση	5η Θέση
Τρόποι	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**
Άρα με 5 · 4 · 3 · 2 · 1 = 5! τρόπους					

Θεωρία 4.

α) Τι ονομάζουμε διατάξεις με επανάληψη των ν στοιχείων ενός συνόλου Α ανά κ;
β) Υπάρχει «τύπος» για τις επαναληπτικές διατάξεις ν στοιχείων ενός συνόλου Α ανά κ;

Απάντηση:

α) Διάταξη με επανάληψη των ν στοιχείων του συνόλου Α ανά κ ονομάζουμε καθένα από τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορούμε να πάρουμε κ στοιχεία του Α, όχι κατ' ανάγκη διαφορετικά, και να τα βάλουμε στη σειρά.

Παράδειγμα 5:
Πόσες διαφορετικές «στήλες» μπορούμε να συμπληρώσουμε σε ένα δελτίο ΠΡΟ-ΠΟ με 13 αγώνες;

Απάντηση:

Σε κάθε αγώνα μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα από τα σύμβολα 1, Χ, 2. Φυσικά αν βάλουμε ένα από τα τρία σύμβολα στον 1ο αγώνα αυτό μπορούμε να το επαναλάβουμε σε όποιους και όσους θέλουμε από τους υπόλοιπους 12. Άρα με τη Βασική Αρχή της Απαρίθμησης έχουμε:

Αγώνες	Τρόποι	Αγώνες	Τρόποι
1ος Αγώνας:	3 (1, Χ, 2)	8ος Αγώνας:	3 (1, Χ, 2)
2ος Αγώνας:	3 (1, Χ, 2)	9ος Αγώνας:	3 (1, Χ, 2)
3ος Αγώνας:	3 (1, Χ, 2)	10ος Αγώνας:	3 (1, Χ, 2)
4ος Αγώνας:	3 (1, Χ, 2)	11ος Αγώνας:	3 (1, Χ, 2)
5ος Αγώνας:	3 (1, Χ, 2)	12ος Αγώνας:	3 (1, Χ, 2)
6ος Αγώνας:	3 (1, Χ, 2)	13ος Αγώνας:	3 (1, Χ, 2)
7ος Αγώνας:	3 (1, Χ, 2)		
Άρα: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^{13}$ στήλες			

β) Με τη Βασική Αρχή της Απαρίθμησης έχουμε:

Σχόλιο:
Στις διατάξεις πρέπει να ισχύει κ ≤ ν. Στις επαναληπτικές διατάξεις μπορεί να ισχύει και κ > ν.

	1η Θέση	2η Θέση	3η Θέση	....	νη Θέση
Τρόποι	ν	ν	ν	....	ν
Άρα: $\nu \cdot \nu \cdot \nu \cdot ...\nu \cdot \nu = \nu^{\kappa}$					

Αν συμβολίσω τις επαναληπτικές διατάξεις ν στοιχείων ενός συνόλου Α ανά κ με E^{ν}_{κ} τότε: $E^{\nu}_{\kappa} = \nu^{\kappa}$.

Θεωρία 5.

α) Τι ονομάζουμε συνδυασμό των ν στοιχείων ενός συνόλου Α ανά κ;
β) Υπάρχει «τύπος» των συνδυασμών των ν στοιχείων ενός συνόλου Α ανά κ;

Απάντηση:

α) Συνδυασμός των ν στοιχείων ενός συνόλου Α ανά κ λέγεται κάθε υποσύνολο του Α με κ στοιχεία.

β) Αν συμβολίσουμε με $\binom{\nu}{\kappa}$ τους συνδυασμούς ν στοιχείων ενός συνόλου Α ανά κ από τη Βασική Αρχή της Απαρίθμησης έχουμε:

(Διατάξεις των ν ανά κ) = (Συνδυασμοί των ν ανά κ)(Μεταθέσεις των κ)

Άρα: $\Delta_{\kappa}^{\nu} = \binom{\nu}{\kappa} M_{\kappa}$, Δηλαδή: $\dfrac{\nu!}{(\nu-\kappa)!} = \binom{\nu}{\kappa}\kappa!$. Άρα: $\binom{\nu}{\kappa} = \dfrac{\nu!}{\kappa!(\nu-\kappa)!}$

Σχόλιο:
Στους συνδυασμούς δε μας ενδιαφέρει η εσωτερική διάταξη των υποσυνόλων του Α. Αν έχω τις τριάδες α, β, γ και β, α, γ για τις «διατάξεις» αυτές είναι διαφορετικές για τους «συνδυασμούς» όμως είναι ίδιες.

Παράδειγμα 6:
Σε ένα διαγωνισμό μαθηματικών παίρνουν μέρος 20 μαθητές. Θα δοθούν χρηματικά έπαθλα αξίας 300 € σε τρεις μαθητές που θα έχουν την καλύτερη επίδοση (αποκλείεται περίπτωση ισοβαθμίας). Πόσες διαφορετικές τριάδες νικητών μπορούμε να σχηματίσουμε;

Απάντηση:

$$\binom{20}{3} = \frac{20!}{3!(20-3)!} = \frac{17!\cdot 18\cdot 19\cdot 20}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 17!} = 1140$$

Λυμένες Ασκήσεις.

1. Να δείξετε ότι: $\dfrac{\mathbf{M_{10}-M_9}}{\mathbf{9!}}=\mathbf{9}$

Λύση:

$$\frac{M_{10}-M_9}{9!}=\frac{10!-9!}{9!}=\frac{9!\cdot 10-9!}{9!}=\frac{9!(10-1)}{9!}=9$$

2. Να λυθεί η εξίσωση: $\mathbf{\Delta_3^\nu=12\nu-24}$

Λύση:

$$\Delta_3^\nu=12\nu-24\Leftrightarrow\frac{\nu!}{3!(\nu-3)!}=12\nu-24\Leftrightarrow\frac{(\nu-3)!(\nu-2)(\nu-1)\nu}{1\cdot2\cdot3(\nu-3)!}=12\nu-24\Leftrightarrow$$

$$\frac{(\nu-2)(\nu-1)\nu}{6}=12(\nu-2)\Leftrightarrow(\nu-2)(\nu-1)\nu=72(\nu-2)\Leftrightarrow(\nu-2)(\nu-1)\nu-72(\nu-2)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\nu-2)[\nu(\nu-1)-72]=0\Leftrightarrow(\nu-2)(\nu^2-\nu-72)=0\Leftrightarrow\nu^2-\nu-72=0\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\begin{cases}\to\nu=\dfrac{1+17}{2}=9 & \text{δεκτή}\\ \to\nu=\dfrac{1-17}{2}=-8 & \text{απορ.}\end{cases}$$

3. Να λυθεί η εξίσωση: $\mathbf{\Delta_3^\nu+\binom{\nu}{\nu-2}=14\nu}$

Λύση:

$$\Delta_3^\nu+\binom{\nu}{\nu-2}=14\nu\Leftrightarrow\frac{\nu!}{(\nu-3)!}+\frac{\nu!}{(\nu-2)!(\nu-\nu+2)!}=14\nu\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{(\nu-3)!(\nu-2)(\nu-1)\nu}{(\nu-3)!}+\frac{(\nu-2)!(\nu-1)\nu}{(\nu-2)!2!}=14\nu\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\nu(\nu-1)(\nu-2)+\nu(\nu-1)=28\nu\Leftrightarrow 2\nu(\nu-1)(\nu-2)+\nu(\nu-1)-28\nu=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\nu[2(\nu-1)(\nu-2)+(\nu-1)-28]=0\Leftrightarrow\nu(2\nu^2-6\nu+4+\nu-1-28)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\nu(2\nu^2-5\nu-25)=0\Leftrightarrow\begin{cases}\nu=0 & \text{απορρίπτεται}\\ 2\nu^2-5\nu-25=0\begin{cases}\to\nu=5 & \text{δεκτή}\\ \to\nu=-\dfrac{10}{4} & \text{απορρίπτεται}\end{cases}\end{cases}$$

4. Από μια ομάδα 17 μαθητών (10 αγόρια και 7 κορίτσια) πρόκειται να εκλέξουμε με κλήρωση μια 5μελή επιτροπή. Ποιες είναι οι πιθανότητες των ενδεχομένων
Α: « και τα 5 μέλη της επιτροπής είναι αγόρια ».
Β: « η επιτροπή έχει 3 αγόρια και 2 κορίτσια ».
Γ: « η επιτροπή έχει τουλάχιστον 3 αγόρια ».

Λύση:

Το πλήθος των δυνατών περιπτώσεων είναι:

$$N(\Omega)=\binom{17}{5}=\frac{17!}{5!(17-5)!}=\frac{12!\cdot13\cdot14\cdot15\cdot16\cdot17}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot12!}=13\cdot7\cdot4\cdot17=6188$$

$$N(A)=\binom{10}{5}=\frac{10!}{5!(10-5)!}=\frac{5!\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot5!}=67\cdot2\cdot3=252$$

Άρα: $P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{252}{6188}=\frac{63}{1547}$. $N(B)=\binom{10}{3}\binom{7}{2}=\frac{10!}{3!(10-3)!}\frac{7!}{2!(7-2)!}=...=2520$ Άρα:

$$P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}=\frac{2520}{6188}=\frac{630}{1547}$$

P(τουλ. 3 αγόρια) = P(3 αγόρια) + P(4 αγόρια) + P(5 αγόρια)

Αρα:

$$P(\Gamma)=\frac{\binom{10}{3}\binom{7}{2}}{6188}+\frac{\binom{10}{4}\binom{7}{1}}{6188}+\frac{\binom{10}{5}}{6188}=\frac{\frac{10!}{3!(10-3)!}\frac{7!}{2!(7-2)!}+\frac{10!}{4!(10-4)!}\frac{7!}{1!(7-1)!}+\frac{10!}{5!(10-5)!}}{6188}=$$

$$=\frac{2520+1470+252}{6188}=\frac{4242}{6188}$$

5. Ένα κουτί περιέχει 15 CD διαφορετικά ανά δύο, από τα οποία τα 4 είναι ελαττωματικά. Αν πάρουμε στην τύχη 3 απ' αυτά, να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:
i) και τα 3 CD είναι ελαττωματικά. ii) κανένα CD δεν είναι ελαττωματικό.
iii) ένα τουλάχιστον CD είναι ελαττωματικό.

Λύση:

Από τα 15 CD παίρνουμε 3 (δεν μας ενδιαφέρει η σειρά). Άρα το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου Ω είναι: $N(\Omega)=\binom{15}{3}=\frac{15!}{3!(15-3)!}=\frac{12!\cdot13\cdot14\cdot15}{1\cdot2\cdot3\cdot12!}=455$

i) Τα 3 από τα 4 ελαττωματικά, μπορούμε να τα επιλέξουμε με $\binom{4}{3} = 3$ τρόπους.

Αν Α: «και τα 3 CD είναι ελαττωματικά» τότε N(A) = 3 Άρα: $P(A) = \frac{3}{455}$

ii) Αν Β: «κανένα CD δεν είναι ελαττωματικό» τότε το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων του Β είναι $N(B) = \binom{11}{3} = \frac{11!}{3!(11-3)!} = \frac{8!\cdot 9\cdot 10\cdot 11}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 8!} = 165$. Άρα: $P(B) = \frac{165}{455} = \frac{55}{91}$

iii) Αν Γ: «ένα τουλάχιστον CD είναι ελαττωματικό» τότε Γ΄ «κανένα CD δεν είναι ελαττωματικό».

Άρα: $P(\Gamma) = 1 - P(\Gamma') = 1 - P(B) = 1 - \frac{55}{91} = \frac{36}{91}$

6. Οι αριθμοί 1, 2, 3, ..., ν τοποθετούνται στη σειρά κατά τύχη. Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου: Α: «Οι αριθμοί 4 και 5 βρίσκονται σε διαδοχικές θέσεις».

Λύση:

Οι αριθμοί 1, 2, 3, ..., ν τοποθετούνται σε μία σειρά με ν! τρόπους. Αρα N(Ω) = ν! Υπάρχουν ν – 1 ζευγάρια διαδοχικών θέσεων για το ζευγάρι των αριθμών (4,5) και άλλα τόσα για το ζευγάρι (5,4). Οι υπόλοιπες ν – 2 θέσεις μπορούν να καταληφθούν με (ν – 2)! τρόπους.

Αρα N(A) = 2(ν – 1)(ν – 2)! Αρα: $P(A) = \frac{2(\nu-1)(\nu-2)!}{\nu!} = \frac{2(\nu-1)(\nu-2)}{(\nu-2)!(\nu-1)\nu} = \frac{2}{\nu}$

7. Να βρεθεί η πιθανότητα μεταξύ 30 μαθητών, δύο τουλάχιστον να έχουν γενέθλια την ίδια μέρα (ο χρόνος υπολογίζεται 365 μέρες).

Λύση:

Αν Α: «Δύο τουλάχιστον μαθητές έχουν γενέθλια την ίδια μέρα».

Α΄: «Οι 30 μαθητές έχουν γενέθλια σε διαφορετικές μέρες».

Το πλήθος των δυνατών περιπτώσεων είναι οι διατάξεις με επανάληψη των 365 ημερών ανά 30.

Άρα $N(\Omega) = 365^{30}$

Το πλήθος των στοιχείων του Α΄ είναι: $N(A') = \Delta_{30}^{365} = \frac{365!}{(365-30)!} = \frac{365!}{335!}$

Άρα: $P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{\frac{365!}{335!}}{365^{30}}$

8. Ποια είναι η πιθανότητα στο ΛΟΤΤΟ να προβλέψουμε 4 ακριβώς σωστά νούμερα παίζοντας μία στήλη.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	

Λύση:

Στήλη Λόττο ονομάζουμε μία εξάδα αριθμών, στην οποία δεν μας ενδιαφέρει η διάταξη των αριθμών. Το πλήθος των δυνατών περιπτώσεων είναι οι συνδυασμοί των 49 στοιχείων, δηλαδή:

$$N(\Omega) = \binom{49}{6} = 13.983.816$$

Αν Α: «4 ακριβώς σωστά νούμερα», χωρίζουμε τη διαδικασία σε δύο φάσεις.

1η Φάση:
Μπορούμε να επιλέξουμε τα 4 από τα 6 σωστά με $\binom{6}{4}$ τρόπους.

2η Φάση:
Μπορούμε να επιλέξουμε τα 2 “λάθος” από τα 43 με $\binom{43}{2}$ τρόπους.

$$\text{Άρα:} \quad N(A) = \binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2} = 13.545$$

$$\text{Άρα:} \quad P(A) = \frac{\binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} = \frac{13.545}{13.983.816} \cong 0,0009686$$

Ερωτήσεις Σωστό – Λάθος.

Να χαρακτηρίσετε σαν σωστά ή λάθος τα παρακάτω και να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

1. **Στη διάταξη ν στοιχείων ανά κ μας ενδιαφέρει η σειρά των στοιχείων.**

Σ **Λ**

Διότι: ....

....

2. **Στη μετάθεση ν στοιχείων δεν μας ενδιαφέρει η σειρά των στοιχείων.**

Σ **Λ**

Διότι: ....

....

3. **Στο συνδυασμό ν στοιχείων δεν μας ενδιαφέρει η σειρά των στοιχείων.**

Σ **Λ**

Διότι: ....

....

4. **Ισχύει:** $\Delta_{\kappa}^{\nu} = \binom{\nu}{\kappa} M_{\kappa}$

Σ **Λ**

Διότι: ....

....

5. **Επιλεγώ 4 κόκκινες σφαίρες από 6. Οι διαφορετικοί τρόποι που μπορώ να τις επιλέξω είναι:** $\binom{6}{4}$

Σ **Λ**

Διότι: ....

....

6. **Αν** $\binom{\nu}{2} = 3$ **τότε** $\nu = 3$.

Σ **Λ**

Διότι: ....

....

7. **Ισχύει:** $\binom{8}{3}=\binom{8}{5}$

Σ **Λ**

Διότι: ....

....

8. **Ισχύει:** $\binom{\nu}{\nu}=\binom{\nu}{0}$

Σ **Λ**

Διότι: ....

....

9. **Ισχύει:** $\Delta_{\nu}^{\nu}=M_{\nu}$

Σ **Λ**

Διότι: ....

....

10. **Ισχύει 7! = 4! · 3!.**

Σ **Λ**

Διότι: ....

....

Ερωτήσεις Πολλαπλής Επιλογής

1. **Το πλήθος όλων των λέξεων που μπορούμε να σχηματίσουμε από τα γράμματα Α, Τ, Σ, Π, Ο είναι:**
α) 25 β) 120 γ) 5! δ) 25! ε) κανένα από τα παραπάνω

2. **Έστω τα ψηφία 1, 2, 3, 4. Το πλήθος των τετραψήφιων αριθμών που σχηματίζονται αν πάρουμε τα ψηφία από μια φορά είναι:**
α) 4536 β) 9000 γ) 3024 δ) 4000 ε) τίποτε από τα προηγούμενα

3. **Ισχύει ότι:**

α) $\binom{\nu}{\kappa}=\frac{\nu!}{\kappa!}$ β) $\binom{\nu}{\kappa}=\frac{\nu!}{\kappa!(\kappa-1)!}$ γ) $\binom{\nu}{\kappa}=\frac{\nu!}{\kappa!(\nu-\kappa)!}$ δ) $\binom{\nu}{\kappa}=\frac{\nu!}{\kappa!(\kappa-\nu)}$

ε) τίποτε από τα προηγούμενα

4. **Αν παίξουμε σύστημα 12 αριθμών στο ΛΟΤΤΟ η πιθανότητα να κερδίσουμε είναι:**

α) $\binom{12}{6}\binom{49}{6}$ β) $\binom{12}{6}\binom{49}{12}$ γ) $\binom{49}{12}\binom{12}{6}$ δ) $\binom{6}{12}\binom{49}{6}$

ε) τίποτε από τα προηγούμενα

5. **Ισχύει ότι:**

α) $\Delta_\kappa^\nu = \binom{\nu}{\kappa} M_\kappa$ β) $\binom{\nu}{\kappa} = \Delta_\kappa^\nu M_\kappa$ γ) $\Delta_\kappa^\nu = \binom{\nu}{\kappa} M_\nu$ δ) $\binom{\nu}{\kappa} = \Delta_\kappa^\nu + M_\kappa$

ε) Κανένα από τα προηγούμενα

6. **Ισχύει ότι:**

α) $M_\nu = \binom{\nu}{\nu}$ β) $M_\nu = \Delta_\nu^\nu$ γ) $M_\nu = \nu \cdot \Delta_\kappa^\nu$ δ) $M_\nu = \kappa \cdot \Delta_\nu^\kappa$

ε) τίποτε από τα προηγούμενα

7. **Το 0! είναι ίσο με:**

α) 0 β) 1 γ) - 1 δ) $\frac{\nu!}{1!}$ ε) τίποτε από τα προηγούμενα

8. **Αν $x = \kappa!\binom{\nu}{\kappa}$ με $\nu > \kappa$ τότε το x ισούται με:**

α) M_κ β) Δ_κ^ν γ) E_κ^ν δ) Δ_ν^κ ε) τίποτε από τα προηγούμενα

9. **Αν ν! = 5! τότε το ν ισούται με:**

α) 5 β) 1 γ) 0 δ) 5ν ε) τίποτε από τα προηγούμενα

10. **Αν ν! = (ν + 1)! τότε το ν ισούται με:**

α) 0 β) -1 γ) 1 δ) ν ε) τίποτε από τα προηγούμενα

Ασκήσεις.

1. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\dfrac{(\nu+1)!}{(\nu+1)^{\nu+1}} : \dfrac{\nu!}{\nu^{\nu}}$ β) $\dfrac{5!\Delta_6^{12}}{\Delta_9^{11}}$ γ) $\dfrac{\Delta_5^{10}-\Delta_5^{9}}{\Delta_4^{8}}$ δ) $\dfrac{\binom{\nu}{3}\cdot\binom{\nu}{1}}{\binom{\nu}{2}^2}$

2. Να αποδείξετε τις ισότητες:

α) $\binom{\nu}{\kappa}=\binom{\nu}{\nu-\kappa}$ β) $\binom{\nu+1}{\kappa+1}=\binom{\nu}{\kappa}\cdot\dfrac{\nu+1}{\kappa+1}$ γ) $\binom{\nu}{\kappa}=\binom{\nu-1}{\kappa-1}+\binom{\nu-1}{\kappa}$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $5\binom{\nu+1}{2}=4\binom{\nu}{3}$ β) $15\binom{\nu+1}{\nu-4}=7\Delta_3^{\nu+1}$

ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ - ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ

4. Πόσοι τετραψήφιοι αριθμοί υπάρχουν που τα ψηφία τους να είναι διαφορετικά;

5. Μια παρέα από 5 αγόρια και 4 κορίτσια βγαίνουν για φαγητό. Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν στο τραπέζι; Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν ώστε τα άτομα του ίδιου φύλου να είναι μαζί;

6. Ένας τύπος αυτοκινήτου παράγεται δίπορτο ή τετράπορτο, σε κυβισμούς 1200, 1600, 2000 και σε πέντε διαφορετικά χρώματα. Πόσα τουλάχιστον αυτοκίνητα πρέπει να έχει μία έκθεση αυτοκινήτων για να είναι πλήρης;

7. Πόσοι διαφορετικοί τριψήφιοι αριθμοί μπορούν να σχηματιστούν από 3 δυάρια, 4 τριάρια και 2 τεσσάρια;

8. Έστω ότι θέλουμε να κατασκευάσουμε πινακίδες κυκλοφορίας οχημάτων που να περιέχουν τρία οποιαδήποτε γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου τα οποία να ακολουθούνται από έναν τετραψήφιο αριθμό, π.χ. AMZ-3835. Να υπολογίσετε το πλήθος των διαφορετικών αυτών πινακίδων κυκλοφορίας.

9. Πόσους τετραψήφιους αριθμούς μπορούμε να φτιάξουμε με τα ψηφία:
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 όταν:
i) έχουν τα ψηφία τους διαφορετικά;
ii) τα ψηφία τους μπορούν να επαναλαμβάνονται;

10. **Τέσσερα άτομα εισέρχονται στο ασανσέρ του υπόγειου γκαράζ ενός πολυκαταστήματος με 6 ορόφους. Με πόσους τρόπους μπορούν να διανεμηθούν στους ορόφους και το ισόγειο;**

11. **Πόσους άρτιους τετραψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε;**

12. **Στο παιχνίδι του ΛΟΤΤΟ έχουμε να επιλέξουμε 6 από τους 49 αριθμούς 1, 2, 3, ..., 49. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε τους αριθμούς αυτούς;**

13. **Από μία τάξη 20 αγοριών επιλέγουμε 5 για να πάρουν μέρος σε έναν αγώνα μπάσκετ. Με πόσους τρόπους μπορούμε να τα επιλέξουμε αν:**
i) δεν υπάρχει περιορισμός στην επιλογή;
ii) στην 5μελή ομάδα συμπεριλαμβάνεται πάντα το ψηλότερο αγόρι της τάξης;

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

14. **Μία τάξη περιέχει 15 αγόρια και 12 κορίτσια. Με πόσους τρόπους μπορεί να εκλεγεί ένα 5μελές συμβούλιο; Ποια είναι η πιθανότητα το συμβούλιο να έχει:**
α) μόνο αγόρια. β) ακριβώς δυο αγόρια, γ) τουλάχιστον τρία κορίτσια,
δ) το πολύ τρία κορίτσια.

15. **Ποια είναι η πιθανότητα δυο τουλάχιστον από τα μέλη μιας 5μελούς οικογένειας να έχουν γενέθλια τον ίδιο μήνα;**

16. **Να υπολογιστούν οι πιθανότητες:**
Α: Να παίξουμε σύστημα στο ΛΟΤΤΟ με 18 αριθμούς και να πετύχουμε 6αρι.
Β: Να παίξουμε σύστημα στο ΛΟΤΤΟ με 12 αριθμούς και να πετύχουμε 5αρι.

17. **Τι πιθανότητα υπάρχει να κληρωθεί στην επόμενη κλήρωση του ΛΟΤΤΟ μια εντελώς διαφορετική 6αδα από την προηγούμενη;**

18. **0 κ. Παπαδόπουλος και η κ. Αναγνώστου είναι στελέχη μιας Ασφαλιστικής Εταιρίας. Όλα τα στελέχη είναι 5 άνδρες και 7 γυναίκες. Για μία εκτίμηση πρόκειται να συσταθεί μία επιτροπή με έναν άνδρα για πρόεδρο και δυο γυναίκες για μέλη. Ποια είναι η πιθανότητα:**
Α: Ο κ. Παπαδόπουλος να είναι πρόεδρος της επιτροπής,
Β: Η κ. Αναγνώστου να είναι μέλος της επιτροπής,
Γ: Ο κ. Παπαδόπουλος να είναι πρόεδρος της επιτροπής και η κ. Αναγνώστου να είναι μέλος της επιτροπής.

19. **Ένα πακέτο από 20 φιλμ περιέχει 4 ελαττωματικά. Αν 5 φιλμ επιλεγούν τυχαία, ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου: Α: Ένα τουλάχιστον φιλμ να είναι ελαττωματικό.**

20. **Σ' ένα πακέτο 10 κασετών υπάρχουν 4 ελαττωματικές. Επιλέγουμε από το πακέτο 3 κασέτες στην τύχη. Ποια είναι η πιθανότητα στην τριάδα να περιέχονται:**
i) Α: το πολύ δύο ελαττωματικές **ii) Β: τουλάχιστον μια ελαττωματική.**

21. **Ένας τεχνικός γνωρίζει ότι δύο από 4 κυκλώματα παρουσιάζουν βλάβη. Ελέγχει τυχαία τα κυκλώματα το ένα κατόπιν του άλλου. Ποια είναι η πιθανότητα να βρει τα χαλασμένα κυκλώματα με δύο δοκιμές;**

3.4 Δεσμευμένη Πιθανότητα Ανεξάρτητα Ενδεχόμενα

Απαραίτητες γνώσεις Θεωρίας

Θεωρία 1.

α) Τι εννοούμε με τον όρο δεσμευμένη πιθανότητα ενός ενδεχομένου;
β) Τι ονομάζουμε δεσμευμένη πιθανότητα ενός ενδεχομένου Α με δεδομένο το ενδεχόμενο Β;
γ) Πότε δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ονομάζονται ανεξάρτητα;
δ) Τι ονομάζουμε πολλαπλασιαστικό νόμο των πιθανοτήτων;

Απάντηση:

α) Όταν αναφερόμαστε στη **δεσμευμένη πιθανότητα** ενός ενδεχομένου εννοούμε την πιθανότητα της πραγματοποίησης του ενδεχομένου κάτω από κάποια προϋπόθεση (ή κάτω από κάποιες προϋποθέσεις).

β) Αν $P(B) \neq 0$ τότε δεσμευμένη πιθανότητα του Α με δεδομένο το Β ονομάζεται ο λόγος $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ και συμβολίζεται με $P(A / B)$. Άρα: $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

γ) i) Δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ονομάζονται ανεξάρτητα αν:

$$\mathbf{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$$

ή

ii) Δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A) \neq 0$ και $P(B) \neq 0$ ονομάζονται ανεξάρτητα αν και μόνο αν:

$$\mathbf{P(A / B) = P(A) \text{ και } P(B / A) = P(B).}$$

Σχόλιο 1:
Με την προϋπόθεση ότι $P(A) \neq 0$, η πιθανότητα του ενδεχομένου Β με δεδομένο το Α είναι:

$$\mathbf{P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

Σχόλιο 2:
Προφανώς:
$\mathbf{P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B/A) =}$
$\mathbf{= P(A/B)\, P(B)}$

δ) Πολλαπλασιαστικό νόμο των πιθανοτήτων ονομάζουμε τις σχέσεις:

$$\mathbf{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B / A)} \quad \textbf{ή} \quad \mathbf{P(A \cap B) = P(B)P(A / B)}$$

Λυμένες Ασκήσεις.

1. Αν σε μια οικογένεια με δυο παιδιά το ένα είναι αγόρι ποια είναι η πιθανότητα να είναι και το δεύτερο παιδί αγόρι;

Λύση:

Ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega = \{AA, AK, KA, KK\}$. Εστω τα ενδεχόμενα:
A: « η οικογένεια έχει τουλάχιστον ένα αγόρι ». Τότε $A = \{AA, AK, KA\}$
B: « η οικογένεια έχει δυο αγόρια ». Τότε $B = \{AA\}$
Το ενδεχόμενο $A|B$: « και τα δυο παιδιά είναι αγόρια όταν το ένα είναι αγόρι » έχει πιθανότητα:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(\text{ακριβώς δυο αγόρια})}{P(\text{τουλάχιστον ένα αγόρι})} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

2. Ενα κουτί περιέχει 15 λευκές και 10 πράσινες σφαίρες. Τραβάμε διαδοχικά δυο σφαίρες χωρίς επανατοποθέτηση. Ποια είναι η πιθανότητα να επιλέξουμε πρώτα λευκή και μετά πράσινη σφαίρα;

Λύση:

Εχουμε:

$$P(\Lambda \cap \Pi) = P(\Lambda)P(\Pi/\Lambda),\ P(\Lambda) = \frac{3}{5} \text{ και } P(\Pi/\Lambda) = \frac{5}{12}. \text{ Αρα: } P(\Lambda \cap \Pi) = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{12} = \frac{1}{4}$$

3. Από τα 52 φύλλα μιας τράπουλας παίρνουμε τυχαία 1. Να βρείτε την πιθανότητα να είναι βαλές, με δεδομένο οτι είναι φιγούρα.

Λύση:

A: “το φύλλο είναι βαλές” και B: “το φύλλο είναι φιγούρα”

$P(B) = 15/52 = 3/13$. Επίσης: $A \cap B = A$, άρα $P(A \cap B) = 4/52 = 1/13$

Άρα: $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{1/13}{3/13} = 1/3$

4. Ρίχνουμε ένα κέρμα 1€, ένα εξαεδρικό ζάρι και τραβάμε ένα φύλλο από μια τράπουλα 52 φύλλων. Ποια είναι η πιθανότητα η πάνω όψη του νομίσματος να είναι η Ευρώπη, το ζάρι να φέρει 4 και το φύλλο της τράπουλας να είναι άσσος;

Λύση:

Εστω τα ενδεχόμενα

Α: « το φύλλο είναι άσσος ».

Ε: « η πάνω όψη του νομίσματος να είναι η Ευρώπη ».

Β: « το ζάρι να φέρει 4 ».

Τότε επειδή τα ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα έχουμε: $P(A\cap E\cap B)=P(A)P(E)P(B)$ με

$P(A)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$, $P(E)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{1}{6}$. Άρα: $P(A\cap E\cap B)=\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{156}$

Ερωτήσεις Σωστό – Λάθος.

Να χαρακτηρίσετε σαν σωστά ή λάθος τα παρακάτω και να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

1. Αν $P(A)\,P(B) = P(A \cap B)$, τα ενδεχόμενα Α και Β λέγονται ανεξάρτητα.

Σ Λ

Διότι: ....

....

2. Τα ενδεχόμενα: Α: ο Γιάννης έχει βαθμό απολυτηρίου 16, Β: ο Γιάννης θα σπουδάσει στο Πανεπιστήμιο, είναι ανεξάρτητα.

Σ Λ

Διότι: ....

....

3. Έστω μία τράπουλα 52 φύλλων. Τραβάμε στην τύχη ένα φύλλο. Τα ενδεχόμενα: Α: το φύλλο είναι κόκκινο, Β: το φύλλο είναι καρό, είναι ανεξάρτητα.

Σ Λ

Διότι: ....

....

4. Τα ανεξάρτητα ενδεχόμενα είναι ασυμβίβαστα.

Σ Λ

Διότι: ....

....

5. Αν δύο ενδεχόμενα είναι ασυμβίβαστα, τότε και τα συμπληρώματά τους είναι ασυμβίβαστα.

Σ Λ

Διότι: ....

....

6. Αν δύο ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα, τότε και τα συμπληρώματά τους είναι ανεξάρτητα.

Σ Λ

Διότι: ....

....

Ερωτήσεις Πολλαπλής Επιλογής.

1. Αν $A \subseteq B$ τότε P(A / B) είναι:
α) 1 β) 0 γ) P(A) δ) P(B) ε) κανένα από τα προηγούμενα

2. Έστω το πείραμα ρίψης ενός ζαριού και τα ενδεχόμενα: Α: να φέρουμε 6. Β: να φέρουμε άρτιο.
Η πιθανότητα P(A / B) θα ισούται με:
α) 1/6 β) 1/2 γ) 1/3 δ) 1 ε) κανένα από τα προηγούμενα

3. Τραβάμε τυχαία ένα από τα 52 φύλλα μίας τράπουλας. Έστω τα ενδεχόμενα:Α: το φύλλο είναι άσσος. Β: το φύλλο είναι σπαθί.
Η πιθανότητα P(A / B) θα ισούται με:
α) 1/4 β) 1/52 γ) 1/13 δ) 4/13 ε) 4/52
στ) κανένα απο τα προηγούμενα

4. Τραβάμε τυχαία ένα από τα 52 φύλλα μιας τράπουλας. Έστω τα ενδεχόμενα:
Α: το φύλλο είναι άσσος. Β: το φύλλο είναι σπαθί. Η πιθανότητα P(B / A) θα ισούται με:
α) 1/4 β) 4/52 γ) 1/13 δ) 1/12 ε) 13/52
στ) κανένα απο τα προηγούμενα

Ασκήσεις.

1. Ρίχνουμε ένα κυβικό ζάρι και ένα νόμισμα ενός Ευρώ. Ποια η πιθανότητα του ενδεχομένου: Α: "το ζάρι φέρνει 4 ή 5 και το νόμισμα Ε"

2. Αν Α, Β ασυμβίβαστα ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω και $P(A) \cdot P(B) \neq 0$, να αποδείξετε ότι τα ενδεχόμενα Α και Β δεν είναι ανεξάρτητα.

3. Αν Α, Β ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω και $P(A) = 2/3$, $P(A|B) = 2/5$, $P(B|A) = 1/3$
α) Να υπολογίσετε την P(B). β) Να εξετάσετε αν τα Α, Β είναι ανεξάρτητα.
γ) Να εξετάσετε αν τα Α, Β είναι ασυμβίβαστα.

4. Έστω $P(A \cap B) = 0{,}5$ και $P(B) = 0{,}6$.
α) Υπολογίστε την P(A / B)
β) Αν $P(A) = 0{,}2$ εξετάστε αν τα ενδεχόμενα Α, Β είναι ανεξάρτητα.

5. Δείξτε ότι ισχύει: $P(A / B') = [P(A) - P(A \cap B)] / [1 - P(B)]$.

6. Έστω τα ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω. Αν τα Α, Β είναι ανεξάρτητα δείξτε ότι ισχύει $P(A \cup B) = 1 - P(A') \cdot P(B')$.

7. **Να δείξετε ότι: $P(A \mid B) + P(A' \mid B) = 1$**

8. **Αν $A \subseteq B$ να δείξετε ότι: $P(A \mid B) = 1$**

9. **Αν τα ενδεχόμενα Α, Β είναι ανεξάρτητα, να δείξετε ότι και τα Α΄, Β΄ είναι ανεξάρτητα.**

10. **Ρίχνουμε ένα ζάρι και τραβάμε από μια τράπουλα 52 φύλλων ένα φύλλο. Ποια είναι η πιθανότητα και τα δυο να είναι 3;**

11. **Έστω δύο αθλητές που συμμετέχουν σε ένα μαραθώνιο. Η πιθανότητα να τερματίσει ο πρώτος είναι $P(A) = 0{,}9$ και η πιθανότητα να τερματίσει ο δεύτερος είναι $P(B) = 0{,}8$. Ποια είναι η πιθανότητα:**

α) Να τερματίσουν και οι δυο;

β) Να τερματίσει μόνον ένας;

γ) Να μην τερματίσει κανείς;

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Ταυτότητες	**Εκθετική συνάρτηση**
Ρίζες	**Λογάριθμοι**
Απόλυτες τιμές	**Λογαριθμική συνάρτηση**
Δυνάμεις	**Εμβαδά βασικών επιπέδων σχημάτων**
Πρόοδοι	**Εμβαδά τριγώνου**
Τριγωνομετρία	**Εμβαδά και όγκοι βασικών στερεών**

Παράρτημα

Ταυτότητες

1) $(\alpha \pm \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 \pm 2\alpha\beta$

2) $(\alpha \pm \beta)^3 = \alpha^3 \pm 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 \pm \beta^3$

3) $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$

4) $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$ και $\alpha^\nu - \beta^\nu = (\alpha - \beta)(\alpha^{\nu-1} + \alpha^{\nu-2}\beta + \alpha^{\nu-3}\beta^2 + ... + \beta^{\nu-1})$

5) $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$ και $\alpha^\nu + \beta^\nu = (\alpha + \beta)(\alpha^{\nu-1} - \alpha^{\nu-2}\beta + \alpha^{\nu-3}\beta^2 + ... + \beta^{\nu-1})$

6) $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = 1/2(\alpha + \beta + \gamma)[(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2]$

7) $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = 0$ ή $\alpha = \beta = \gamma$

Ρίζες

Ορισμός: Έστω $x \neq 0$, $\nu \in N^*$. Τότε $x^\nu = \alpha \Leftrightarrow x = \sqrt[\nu]{\alpha}$

Ιδιότητες: Για $\alpha, \beta \geq 0$ έχουμε:

1) $\sqrt[\nu]{\alpha}\sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha\beta}$

2) $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$, $\beta \neq 0$

3) $\alpha\sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha^\nu\beta}$

4) $\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}} = \sqrt[\nu\mu]{\alpha}$

5) $\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$

6) $\sqrt[\nu]{\alpha^\mu} = \alpha^{\mu/\nu}$

7) Για $\alpha \in R$, $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$

Απόλυτες Τιμές

Ορισμός: Αν $x \in R$, τότε: $|x| = \begin{cases} -x, & x \geq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$

Ιδιότητες: Για $x, y \in R$:

1) $|x|^2 = |x^2| = x^2$

2) $|xy| = |x||y|$

3) $\dfrac{|x|}{|y|} = \left|\dfrac{x}{y}\right|$

4) $\big||x| - |y|\big| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$

$|x| = \alpha \begin{cases} \xrightarrow{\alpha>0} x = \pm\alpha \\ \xrightarrow{\alpha<0} \text{αδύνατη} \end{cases}$

$|x| \leq \alpha \begin{cases} \xrightarrow{\alpha>0} -\alpha \leq x \leq +\alpha \\ \xrightarrow{\alpha<0} \text{αδύνατη} \end{cases}$

$|x| \geq \alpha \begin{cases} \xrightarrow{\alpha>0} x \leq -\alpha \text{ ή } x \geq \alpha \\ \xrightarrow{\alpha<0} \text{αόριστη} \end{cases}$

Δυνάμεις

Ορισμός: $\alpha^\nu = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \ldots \cdot \alpha}_{\nu-\text{φορές}}$ $\qquad \alpha^{-\nu} = 1/\alpha^\nu, \quad \alpha \neq 0$ $\qquad \alpha^0 = 1, \quad \alpha \neq 0$

Ιδιότητες:

1) $\alpha^\mu \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$

2) $\alpha^\mu / \alpha^\nu = \alpha^{\mu-\nu}$

3) $(\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu \cdot \nu}$

4) $(\alpha\beta)^\nu = \alpha^\nu \beta^\nu$

5) $(\alpha/\beta)^\nu = \alpha^\nu / \beta^\nu$

Πρόοδοι

Αριθμητική Πρόοδος

1) $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \omega$

2) $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$

3) α, β, γ, διαδ. όροι $\Leftrightarrow 2\beta = \alpha + \gamma$

4) $S_\nu = \nu/2\ (\alpha_1 + \alpha_\nu) = \nu/2 \cdot [2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega]$

Γεωμετρική Πρόοδος

1) $\alpha_{\nu+1} = \lambda\alpha_\nu \qquad \alpha_1, \lambda \neq 0$

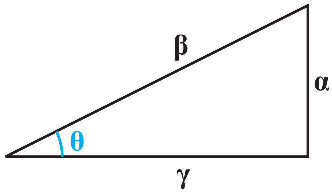
2) $\alpha_\nu = \alpha_1 \lambda^{\nu-1}$

3) α, β, γ, διαδ. όροι $\Leftrightarrow \beta^2 = \alpha\gamma$

4) $S_\nu = \alpha_1 \dfrac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}, \quad \lambda \neq 1$

Τριγωνομετρία

Α. Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας



ημθ = α/β εφθ = α/γ

συνθ = γ/β σφθ = γ/α

Β. Βασικές τριγωνομετρικές σχέσεις

1) $|\eta\mu x| \le 1$

2) $|\sigma\upsilon\nu x| \le 1$

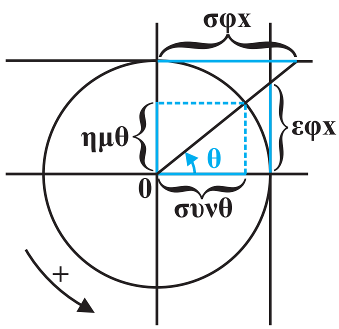
3) $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$

4) $\varepsilon\varphi x = \dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}, \quad x \ne \kappa\pi + \dfrac{\pi}{2} \quad (\kappa \in Z)$

5) $\sigma\varphi x = \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}, \quad x \ne \kappa\pi \quad (\kappa \in Z)$

6) $\varepsilon\varphi x \cdot \sigma\varphi x = 1$

Γ. Τριγωνομετρικός κύκλος



Δ. Τριγωνομετρικοί αριθμοί βασικών γωνιών

Γωνία θ		Τριγωνομετρικοί αριθμοί			
Μοίρες	Ακτίνια	ημx	συνx	εφx	σφx
0^0	0	0	1	0	Δ.Ο.
30^0	π/6	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$
45^0	π/4	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1
60^0	π/3	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$
90^0	π/2	1	0	Δ.Ο.	0

Ε. Βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις

1) $\eta\mu x = \eta\mu\theta \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \theta, & \kappa \in Z \\ x = 2\kappa\pi + \pi - \theta, & \kappa \in Z \end{cases}$

2) $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \theta, \ \kappa \in Z$

3) $\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\theta \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \theta, \ \kappa \in Z$

4) $\sigma\varphi x = \sigma\varphi\theta \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \theta, \ \kappa \in Z$

Τριγωνομετρία

ΣΤ. Αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο

Αντίθετα τόξα	Παραπληρωματικά	Συμπληρωματικά	Τοξα με διαφορά π
ημ(-x) = -ημx	ημ(π - x) = ημx	ημ(π/2 - x) = συνx	ημ(π + x) = -ημx
συν(-x) = συνx	συν(π - x) = -συνx	συν(π/2 - x) = ημx	συν(π + x) = -συνx
εφ(-x) = -εφx	εφ(π - x) = -εφx	εφ(π/2 - x) = σφx	εφ(π + x) = εφx
σφ(-x) = -σφx	σφ(π - x) = -σφx	σφ(π/2 - x) = εφx	σφ(π + x) = σφx

Ζ. Τριγωνομετρικές ταυτότητες

Τριγωνομετρικοι αριθμοί αθροισμάτων γωνιών

1) ημ(α+β) = ημασυνβ + συναημβ

2) ημ(α-β) = ημασυνβ - συναημβ

3) συν(α+β) = συνασυνβ - ημαημβ

4) συν(α-β) = συνασυνβ + ημαημβ

5) $εφ(α+β)=\dfrac{εφα+εφβ}{1-εφαεφβ}$

6) $εφ(α-β)=\dfrac{εφα-εφβ}{1+εφαεφβ}$

7) $σφ(α+β)=\dfrac{σφασφβ-1}{σφβ+σφα}$

8) $σφ(α-β)=\dfrac{σφασφβ+1}{σφβ-σφα}$

Μετασχηματισμός γινομένου σε άθροισμα

1) 2ημασυνβ = ημ(α+β) + ημ(α-β)

2) 2συνασυνβ = συν(α-β) + συν(α+β)

3) 2ημαημβ = συν(α-β) - συν(α+β)

Τριγωνομετρικοί αριθμοί διπλάσιας γωνίας

1) ημ2α = 2ημασυνα

2) $συν2α = συν^2α - ημ^2α$
$= 2συν^2α - 1$
$= 1 - 2ημ^2α$

3) $εφ2α=\dfrac{2εφα}{1-εφ^2α}$

4) $ημ^2α=\dfrac{1-συν2α}{2}$

5) $συν^2α=\dfrac{1+συν2α}{2}$

6) $εφ^2α=\dfrac{1-συν2α}{1+συν2α}$

Μετασχηματισμός αθροίσματος σε γινόμενο

1) $ημA+ημB=2ημ\dfrac{A+B}{2}συν\dfrac{A-B}{2}$

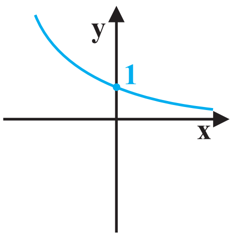
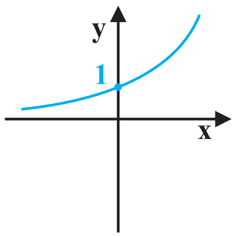
2) $ημA-ημB=2ημ\dfrac{A-B}{2}συν\dfrac{A+B}{2}$

3) $συνA+συνB=2συν\dfrac{A+B}{2}συν\dfrac{A-B}{2}$

4) $συνA-συνB=-2ημ\dfrac{A-B}{2}ημ\dfrac{A+B}{2}$

Εκθετική συνάρτηση

Τύπος $f(x) = \alpha^x \quad \alpha > 0, \alpha \neq 1,$

	$0 < \alpha < 1$	$\alpha > 1$
Πεδίο ορισμού	IR	IR
Σύνολο τιμών	$(0,+\infty)$	$(0,+\infty)$
Μονοτονία	Γν. φθίνουσα	Γν. αύξουσα
Ασύμπτωτες	άξονας xx΄	άξονας xx΄
Γραφική παράσταση		

Λογάριθμοι

Ορισμός: $\log_\alpha\theta = x \Leftrightarrow \alpha^x = \theta, \qquad \theta > 0, \alpha > 0, \alpha \neq 1$

Ισχύει: i) $\log_\alpha \alpha^x = x$ ii) $\alpha^{\log_\alpha\theta} = \theta$

iii) $\log_\alpha 1 = 0$ iv) $\log_\alpha \alpha = 1$

Ιδιότητες:

1) $\log_\alpha \theta_1\theta_2 = \log_\alpha\theta_1 + \log_\alpha\theta_2$

2) $\log_\alpha \dfrac{\theta_1}{\theta_2} = \log_\alpha\theta_1 - \log_\alpha\theta_2$

3) $\log_\alpha \theta^\kappa = \kappa \log_\alpha\theta$

Δεκαδικοί λογάριθμοι:

$\log\theta = x \Leftrightarrow 10^x = \theta$

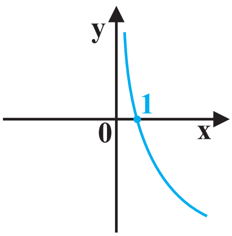
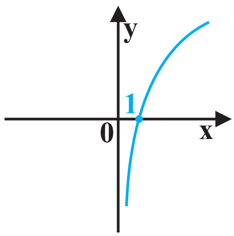
Φυσικοί λογάριθμοι:

$\ln\theta = x \Leftrightarrow e^x = \theta$

Τύπος αλλαγής βάσης:

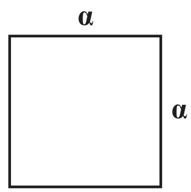
$\log_\beta\theta = \dfrac{\log_\alpha\theta}{\log_\alpha\beta}$ για $\alpha, \beta > 0, \quad \alpha, \beta \neq 0, \theta > 0$

Λογαριθμική συνάρτηση

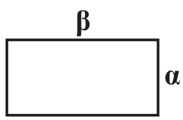
Τύπος $f(x) = \log_{\alpha} x$	$\alpha > 0,\ \alpha \neq 1$	
	$0 < \alpha < 1$	$\alpha > 1$
Πεδίο ορισμού	$(0,+\infty)$	$(0,+\infty)$
Σύνολο τιμών	IR	IR
Μονοτονία	Γν. φθίνουσα	Γν. αύξουσα
Ασύμπτωτες	άξονας yy΄	άξονας yy΄
Γραφική παράσταση		

Εμβαδά βασικών επίπεδων σχημάτων

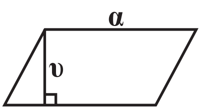
1) Τετράγωνο
$E = \alpha^2$



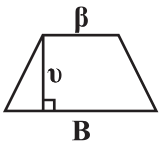
2) Ορθογώνιο
$E = \alpha\beta$



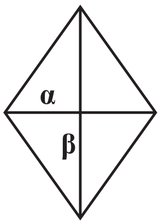
3) Παρ/γραμμο
$E = \alpha\upsilon$



4) Τραπέζιο
$$E = \frac{\beta + B}{2} \cdot \upsilon$$

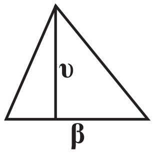


5) Ρόμβος
$$E = \frac{\alpha\beta}{2}$$

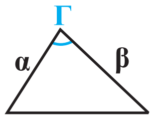


Εμβαδά τριγώνου

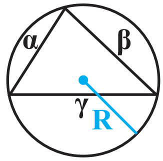
1) $E = \frac{1}{2}\beta\upsilon$



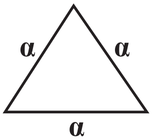
3) $E = \frac{1}{2}\alpha\beta\eta\mu\Gamma$



5) $E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$

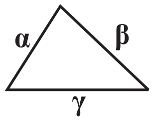


2) $E = \frac{\sqrt{3}\alpha^2}{4}$

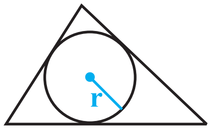


(ισόπλευρο)

4) $E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$

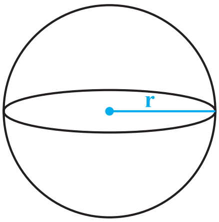


6) $E = \tau\rho$

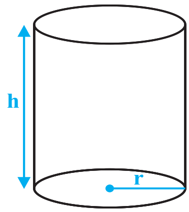


Εμβαδά και όγκοι βασικών στερεών

1) Σφαίρα:
$E = 4\pi r^2$
$V = 4/3\ \pi r^3$

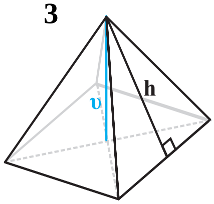


3) Κύλινδρος:
$E = 2\pi r^2 + 2\pi rh$
$V = h \cdot \pi r^2$

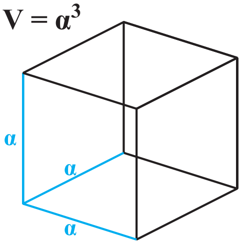


3) Πυραμίδα:
$E = \text{εμβ. βάσ.} + \frac{(\text{περίμ. βάσ.})\cdot h}{2}$

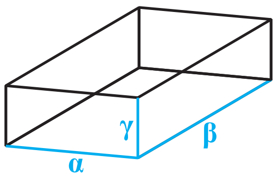
$V = \frac{(\text{εμβ. βάσ.})\cdot \upsilon}{3}$



2) Κύβος:
$E = 6\alpha^2$
$V = \alpha^3$

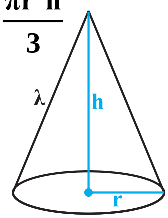


3) Ορθογώνιο παρ/πεδο
$E = 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma)$
$V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$



3) Κώνος:
$E = \lambda\pi r + \pi r^2$

$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$



ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κεφάλαιο 1.1: Συναρτήσεις

Ερωτήσεις Σωστό - Λάθος.

1. Σ	**10.** Σ	**19.** Σ	**28.** Σ	**37.** Σ
2. Λ	**11.** Σ	**20.** Σ	**29.** Σ	**38.** Σ
3. Σ	**12.** Λ	**21.** Λ	**30.** Σ	**39.** Σ
4. Λ	**13.** Σ	**22.** Λ	**31.** Λ	**40.** Σ
5. Σ	**14.** Λ	**23.** Λ	**32.** Λ	**41.** Λ
6. Σ	**15.** Σ	**24.** Λ	**33.** Λ	
7. Λ	**16.** Λ	**25.** Λ	**34.** Σ	
8. Σ	**17.** Λ	**26.** Σ	**35.** Λ	
9. Λ	**18.** Λ	**27.** Λ	**36.** Σ	

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής.

1. γ	**10.** δ	**19.** ε
2. δ	**11.** α	**20.** γ
3. γ	**12.** β	**21.** β
4. α	**13.** γ	**22.** δ
5. α	**14.** β	**23.** ε
6. γ	**15.** γ	
7. γ	**16.** γ	
8. β	**17.** γ	
9. ε	**18.** δ	

Ασκήσεις Αντιστοίχισης

1. **Α** - 3 **Β** - 4 **Γ** - 1 **Δ** - 10
Ε - 7 **Ζ** - 8

2. **α** - 1 **β** - 3 **γ** - 5 **δ** - 7 **ε** - 4

3. **α** - 1 **β** - 2 **γ** - 5 **δ** - 7

Ασκήσεις

1. **α)** **ι)** 0 **ιι)** 12 **ιιι)** 6
β) δεν διέρχεται
γ) (2, 3)

2. $D_f = [0, +\infty)$ και τέμνει τον xx΄ στο Ο(0, 0)
$D_g = (-\infty, -1] \cup [4, +\infty)$ και τέμνει τον xx΄ στα Α(-1, 0) και Β(4, 0)

3. $D_f = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ και τέμνει τον xx΄ στο Α(-3, 0)

4. $D_f = R - \{0, 1, -2\}$
και $x \in [-10, -2) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$

5. **α)** α = 3 **β)** (-2/3, 1)

6. λ = 1 και $D_g = (-\infty, -2] \cup [0, +\infty)$

7. α = -2/3, β = 5/3

8. λ = -4

10. **α)** R **β)** f(2) = 7, f(-2) = 7, f(3) = 12
γ) x = -1 ή x = 1

11. **α)** α = 3/2, β = -4 **β)** (-8/3, +∞)
γ) Α(-8/3, 0)

15. **i)** R - {1} **ii)** R - {2, -2} **iii)** R
iv) R - {1, 1} **v)** R **vi)** R - {6}

16. **i)** $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$
ii) $(-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty)$
iii) $(-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$
iv) R
v) R
vi) R

17. **i)** $[-2, 1] \cup (1, +\infty)$
ii) $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$
iii) $(-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$
iv) $(2, +\infty)$
v) $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$
vi) $(0, +\infty)$
vii) $(-\infty, -1) \cup [3, +\infty)$
viii) $[0, +\infty)$

18. **i)** $(1, +\infty)$
ii) R
iii) $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$
iv) $(6, +\infty)$
v) $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

19. **i)** $[2, +\infty)$
ii) $[1, 5) \cup (5, 10)$
iii) $(-4, 0) \cup (0, 4]$
iv) $[e, 5)$
v) $x \neq 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2},\ \kappa \in Z$
vi) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

20. **i)** $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$
ii) $x \neq 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2},\ \kappa \in Z$
iii) $x \neq \kappa\pi,\ \kappa \in Z$
iv) $(1, +\infty)$
v) $x \neq 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2},\ \kappa \in Z$

21. $\alpha > 0$

22. **α)** $\alpha < 0$, **β)** $\alpha \neq 0$

23. **α)** $\alpha = 0$, **β)** $\alpha = 1$, **γ)** $\alpha = -2$

24. $\alpha \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$

25. **α)** αδύνατη, **β)** R, **γ)** R

26. **α)** R, **β)** $x = 1$ ή $x = 2$, **γ)** R

27. **α)** $(f \cdot g)(x) = 3x^3 + 7x^2 - x - 1$
με $x \in [0, 10]$
β) Ναι
γ) $\frac{f}{g}(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{3x + 1}$ με $x \in [0,10]$

28. **α)** $x = -3$ ή $x = 3$
β) $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$
γ) **i)** $Dg = R - \{-3, 3\}$
ii) $Dh = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$
iii) $D\varphi = (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$

29. **i)** $(f + g)(x) = 3x$
ii) $(f - 3g)(x) = 4x^2 + 3x - 4$ με $x \in R$
iii) $(f^2 \cdot g)(x) =$
$= -x^6 - 6x^5 - 6x^4 + 12x^3 + 6x^2 - 6x + 1$
με $x \in R$
iv) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{1 - x^2}$ με $x \in R - \{-1, 1\}$

30. **i)** $2f(x) + g(2x) = 2x^2 + 2x - 6$ με $x \in R$
ii) $3f(x) - g(x)^2 = -3x^2 - 12x - 2$ με $x \in R$
iii) $f(x) \cdot g(x) = 3x^3 - 14x^2 + 2x - 2$ με $x \in R$
iv) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - 4x - 2}{3x - 2}$ με $x \in R - \left\{\frac{2}{3}\right\}$

31. **i)** $f(x + 1) + g(x) = x^2 + 4x - 1$ με $x \in R$
ii) $2f(x) - [g(x)]^2 = -2x^2 + 12x - 7$ με $x \in R$
iii) $(x + 1)f(x) - g(x^2) = x^3 - x^2 + x + 4$ με $x \in R$

32. **i)** 0, **ii)** 0, **iii)** -1, **iv)** 0, **v)** 0, **vi)** 1

33. **i)** 11, **ii)** $\frac{3}{5}$, **iii)** 2, **iv)** 1, **v)** 5

34. **i)** -1, **ii)** $\frac{3-\sqrt{3}}{6}$, **iii)** -8

35. 12

36. $\frac{3}{2}$

37. 0

38. **α)** 21, **β)** 19, **γ)** 7

39. 0

40. **α)** -1 και 4, **β)** -4, **γ)** 27, **δ)** Δεν ορίζεται

41. **α)** 4, **β)** 16, **γ)** 2

42. $\alpha=\frac{\pi}{6}$ ή $\alpha=\frac{5\pi}{6}$

43. $\alpha = -1$

44. $\alpha=\frac{7}{9}$

45. $\alpha = -13$ και $\beta = 28$

46. **α)** $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$

β) 1

γ) Είναι συνεχής

47. **α)** Ναι **β)** $\alpha = 24$

48. $\alpha=-\frac{1}{2}$ και $\beta=-\frac{1}{2}$

49. Δεν είναι συνεχής

50. Δεν είναι συνεχής

Προβλήματα

51. **α)** 16°C, **β)** 6 ώρες, **γ)**

52. $E(x) = 6x - x^2$ με $x \in (0, 6)$

53. $\Pi(x)=2\sqrt{2\delta^2-30\delta+225}$

$E(x)=\frac{15\delta-\delta^2}{2}$ με $\delta\in(0, 15)$

54. $E(x) = 36 - 12x$ με $x \in (0, 3)$

55. $E(x)=\frac{x^2\sqrt{3}}{36}+(1-x)^2$ με $x\in(0, 1)$

56. $\delta(\alpha)=\sqrt{2\alpha^2-12\alpha+36}$ με $\alpha\in(0, 6)$

57. $V(x) = x \cdot (\alpha - 2x) \cdot (\beta - 2x)$

58. $E(x)=23x^2$ $V(x)=\frac{15x^3}{4}$

59. $\mu_\alpha(x)=\frac{\sqrt{x^4+25}}{2x}$ με $x>0$

60. $K(x)=17x+\frac{8400}{x}$ με $x>0$

61. $K(x)=3x\cdot(3\sqrt{3}+10$ με $x>0$

62. $V(\delta) = 20\pi \cdot \delta^2$

63. $V(\delta)=\frac{\pi\cdot\delta^3}{12}$

64. $E(\rho) = 50\cdot\pi\cdot\rho - \pi\cdot\rho^2$ $V(\rho)=\frac{20\pi\cdot\rho^2}{3}$

65. $V(\delta)=\frac{3}{2}\delta^3$

66. $\Pi(\delta)=\delta+\frac{200}{\delta}$

Κεφάλαιο 1.2: Η έννοια της παραγώγου

Ερωτήσεις Σωστό - Λάθος.

1. Σ	**3.** Λ	**5.** Σ	**7.** Λ	**9.** Σ
2. Λ	**4.** Σ	**6.** Σ	**8.** Λ	**10.** Σ

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής.

1. β	**4.** ε	**7.** δ	**10.** γ
2. γ	**5.** α	**8.** β	**11.** δ
3. γ	**6.** β	**9.** α	

Ασκήσεις

1. **α)** 2 **β)** $y = 2x - 3$

2. **α)** 4α **β)** 1

3. **α)** 0 **β)** $y = 1$

4. **α)** 6 - α **β)** 5

5. $(\alpha, \beta) = (3{,}5\ ,\ 6)$

6. 45^0

7. 4

8. $f\,'(1) = g\,'(1) = 1$

9. **α)** 3248997 **β)** 3605

10. 3π

11. -50000π.

Κεφάλαιο 1.3: Παράγωγος συνάρτηση

Ερωτήσεις Σωστό - Λάθος.

1. Λ	**8.** Σ	**15.** Λ	**22.** Σ	**29.** Λ
2. Σ	**9.** Σ	**16.** Σ	**23.** Λ	**30.** Σ
3. Λ	**10.** Σ	**17.** Σ	**24.** Σ	**31.** Σ
4. Σ	**11.** Σ	**18.** Λ	**25.** Σ	**32.** Σ
5. Σ	**12.** Σ	**19.** Σ	**26.** Λ	
6. Σ	**13.** Σ	**20.** Σ	**27.** Σ	
7. Λ	**14.** Σ	**21.** Λ	**28.** Σ	

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής.

1. α	**7.** δ	**13.** δ	**19.** δ
2. α	**8.** γ	**14.** α	**20.** β
3. δ	**9.** β	**15.** γ	**21.** γ
4. ε	**10.** γ	**16.** ε	**22.** β
5. α	**11.** γ	**17.** ε	**23.** α
6. α	**12.** ε	**18.** γ	

Ασκήσεις Αντιστοίχισης

1. **1** - Α **2** - Δ **3** - Γ

2. **α** - 2 **β** - 3 **γ** - 5 **δ** - 7 **ε** - 6 **στ** - 9

3. **α** - 2 **β** - 1 **γ** - 4 **δ** - 3

4. **α** - 1 **β** - 2 **γ** - 5 **δ** - 4 **ε** - 6 **στ** - 8 **ζ** - 10

5. **α** - 3 **β** - 5 **γ** - 2 **δ** - 7 **ε** - 8

6. **1** - Β **2** - Γ

7. **1** - Α **2** - Β

Ασκήσεις

1. **1)** 1 **2)** 0 **3)** $6x^5$ **4)** $16x^{15}$ **5)** $-3x^{-4}$ **6)** $-8x^{-9}$ **7)** $-5/x^6$ **8)** $-10/x^{11}$ **9)** $12x^{11}$

2. **1)** $x^{-3/4}/4$ **2)** $x^{-7/8}/8$ **3)** $x^{-4/5}/5$ **4)** $x^{-9/10}/10$ **5)** $3x^{-2/5}/5$ **6)** $16x^{7/9}/9$ **7)** $7x^{1/6}/6$ **8)** $2x^{-1/3}/3$ **9)** $-x^{-4/3}/3$

3. **1)** $2x + 1$ **2)** $5x^4 - 3x^2 + 1$ **3)** $6x + 2$ **4)** $5 + 2/x^2$ **5)** $6x - 4$ **6)** $\frac{1}{2\sqrt{x}} - ημx$ **7)** $\frac{x\sqrt{x} - 2\sqrt{x}}{x} + \ln x\left(\frac{3\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) + e^x$ **8)** $12x^3 - 2/x^3$ **9)** $7x^6 + 5x^4$

4. **1)** $7x^6 + 12x^5 + 10x^4 + 16x^3$ **2)** $6x^2 + 3συνx$ **3)** $2συνx - 3ημx$ **4)** $5/x + 3e^x$ **5)** $2συνx + e^x$ **6)** $ημx/x + \ln x \cdot συνx$ **7)** $4ημx + 4συνx$ **8)** $e^x\,(συνx - ημx)$ **9)** $\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x}$

5. **1)** $\frac{e^x}{3\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[3]{x} \cdot e^x$ **2)** $2e^x\,(\ln x + x\ln x + 1)$ **3)** $\frac{συνx - ημx}{e^x}$ **4)** $\frac{1 - \ln x}{x^2}$ **5)** $-\frac{1}{ημ^2 x}$ **6)** $\frac{3x^2 \ln x - x^2}{\ln^2 x}$ **7)** $(2x^2 + 5x - 3)e^x$ **8)** $2συνx \cdot e^x$ **9)** $(1/x + 3)ημx + (\ln x + 3x)συνx$

6. **1)** $2συν2x$ **2)** $\frac{\ln x + e^x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x} + \sqrt{x} \cdot e^x$ **3)** $\ln x + \frac{x+1}{x}$ **4)** $\frac{3e^x(συνx - ημx)}{ημ^2 x}$ **5)** $\frac{(x^3 - 6x + 1)ημx + (-x^3 + 6x^2 - 6x - 1)συνx}{(ημx + συνx)^2}$ **6)** $\frac{\frac{1}{συν^2 x} - εφx - 3}{e^x}$ **7)** $\frac{2(\ln x + 1)}{x^2 + 1} - \frac{4x^2 \ln x}{(x^2 + 1)^2}$ **8)** $3 \cdot \frac{ημx + x(συνx - ημx)}{e^x}$ **9)** $\frac{1/x + 8x - 2 - \ln x - 3x^2}{e^x}$

7. **1)** $\dfrac{(3x^2+3)\sqrt[3]{x}-(x^3+3x-8)\cdot\dfrac{x^{-2/3}}{3}}{(\sqrt[3]{x})^2}$

2) $\dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}\cdot e^x}+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}\cdot e^x}-\dfrac{\sqrt[5]{x}+\sqrt[3]{x}}{e^x}$

3) $\dfrac{\ln x}{6\sqrt[6]{x^5}(x^2+1)}+\dfrac{\sqrt[6]{x}}{x(x^2+1)}-\dfrac{2x\sqrt[6]{x}\cdot\ln x}{(x^2+1)^2}$

4) $\dfrac{e^x}{x\eta\mu x}-\dfrac{e^x}{x^2\eta\mu x}-\dfrac{\sigma\phi x}{x\eta\mu x}$

5) $\dfrac{(6x^5-x^3)\eta\mu x+(x^6+3x^2)\sigma\upsilon\nu x}{\ln x}-\dfrac{x^6\eta\mu x+x^3\sigma\upsilon\nu x}{x\ln^2 x}$

6) $\dfrac{1-2\ln x-x^2e^x-xe^x}{x^3(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)}-\dfrac{(\ln x+xe^x)(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)}{x^2(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)^2}$

7) $12x(2x^2+1)^2$

8) $15(3x-1)^4$

9) $4(\eta\mu x^2-3x)^3(\eta\mu 2x-3)$

8. **1)** $-\dfrac{4x+2}{(x^2+x+1)^3}$

2) $3(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)^2(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)$

3) $\dfrac{2x+\sigma\upsilon\nu x}{2\sqrt{x^2+\eta\mu x}}$

4) $\dfrac{-5/x-5e^x}{(\ln x+e^x)^6}$

5) $\dfrac{1/x-3}{3\sqrt[3]{(\ln x-3x)^2}}$

6) $\dfrac{1}{2\sigma\upsilon\nu^2x\sqrt{\varepsilon\phi x}}$

7) $\dfrac{6x^2+4}{5\sqrt[5]{(x^3+2x)^3}}$

8) $\dfrac{3\sqrt{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)}{2}$

9) $\dfrac{e^x+1/x}{2\sqrt{e^x+\ln x}}$

9. **1)** $\dfrac{\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x}{4\sqrt[4]{(x\eta\mu x)^3}}$

2) $\dfrac{\sigma\upsilon\nu 2x}{\sqrt{\eta\mu 2x}}$

3) $-\dfrac{e^x+2\sigma\upsilon\nu x}{3\sqrt[3]{(e^x+2\eta\mu x)^2}}$

4) $-\dfrac{2x+3}{2\sqrt{(x^2+3x)^3}}$

5) $-\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{2\sqrt{\eta\mu^3 x}}$

6) $\dfrac{\dfrac{\sqrt[3]{\ln x-1}}{\sqrt{2x+1}}-\dfrac{\sqrt{2x+1}}{3x\sqrt[3]{(\ln x-1)^2}}}{\sqrt[3]{(\ln x-1)^2}}$

7) $\dfrac{x^2+1}{\varepsilon\varphi x}\cdot\dfrac{\dfrac{x^2+1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}-2x\varepsilon\varphi x}{(x^2+1)^2}$ **8)** $-3\eta\mu 3x e^{\sigma\upsilon\nu 3x}$ **9)** $-2\eta\mu 2x\cdot\sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu 2x)$

10. **1)** $5(2x^3+3x)^4(6x^2+3)$

2) $\dfrac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x}}$

3) $2e^{2x}\sigma\upsilon\nu e^{2x}$

4) $-9\eta\mu 3x\cdot e^{\sigma\upsilon\nu 3x}$

5) $\dfrac{6x}{3x^2+5}$

6) $-\eta\mu(\eta\mu x^2)\sigma\upsilon\nu x^2\cdot 2x$

7) $-\eta\mu\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)\cdot\dfrac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x^2}$

8) $\dfrac{-x\eta\mu(\eta\mu x)\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x)}{x^2}$

9) $-\eta\mu[\eta\mu(2x^2+1)+\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x)][4x\sigma\upsilon\nu(2x^2+1)-\eta\mu x\sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu x)]$

11. **1)** $\sigma\upsilon\nu(3x^2+2x+1)(6x+2)$

2) $\sigma\upsilon\nu(x^3+\ln x)(3x^2+1/x)$

3) $-\eta\mu(e^x+2x)(e^x+2)$

4) $\sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu 3x)(-3\eta\mu 3x)$

5) $\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)}$

6) $\sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu x)(-\eta\mu x)$

7) $3e^{3x}$

8) $3\sigma\upsilon\nu x\cdot e^{3\eta\mu x}$

9) $-\dfrac{e^{-\varepsilon\varphi x}}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

12. **1)** $(3x^2+5)e^{x^3+5x-1}$

2) $\dfrac{-e^{1/x}}{x^2}$

3) $\dfrac{e^{\sqrt{x+1}}}{2\sqrt{x+1}}$

4) $\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}$

5) $\dfrac{e^x+3}{e^x+3x-2}$

6) $1/2x$

7) $\dfrac{2x+3}{2(x^2+3x+2)}$

8) $\dfrac{3\ln^2 x}{x}$

9) $3/x$

13. **1)** $\dfrac{x}{(x^2+3)\sqrt{\ln(x^2+3)}}$

2) $3\eta\mu^2(5x^2+6x+3)\sigma\upsilon\nu(5x^2+6x+3)(10x+6)$

3) $-\dfrac{\eta\mu 2\ln x}{x}$

4) $\dfrac{-16\sigma\upsilon\nu 4x}{\eta\mu^5 4x}$

5) $\dfrac{3e^{\frac{3x+1}{2}}}{2}$

6) $e^{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu 2x}(\sigma\upsilon\nu x-2\eta\mu 2x)$

7) $\dfrac{5\ln^4 x+3\ln^2 x+1}{x}$ **8)** 3σφ3x **9)** $\dfrac{3}{2(3x+2)}$

14. 1) -σφx

2) $\dfrac{ημ2x+2xσυνx^2}{συν^2(ημ^2x+ημx^2)}$

3) 4σφx · ln(ημ²x)

4) $-2ημx^3εφx^4 \cdot \ln(συν^3x^4)$

5) 9σφ3x

6) $\dfrac{συν(συν\ln x)(-ημ\ln x)}{x}$

7) $3e^{3x+1} \cdot συνe^{3x+1}$

8) $\dfrac{e^{ημ\ln x}συν\ln x}{x}$

9) $\dfrac{ημ2x(3συνx-2)}{(ημ^2x+συν^3x)^3}$

15. 1. 2συν2xσυν3x - 3ημ2xημ3x

2. $2(e^{x^2} \cdot 2x\ln x + e^{x^2}/x)$

3. $6xημ^2x + (3x^2+2)ημ2x$

4. $2(\ln x + ημx)\left(\dfrac{1}{x} + συνx\right)(e^x + συνx)^3 + 3(\ln x + ημx)^2(e^x + συνx)^2(e^x - ημx)$

5. $\dfrac{3e^{3x+2}(ημ(3x+2)-συν(3x+2))}{ημ^2(3x+2)}$

6. $\dfrac{\dfrac{(3x^2+3)\ln(ημx)}{x^3+3x-2}-\ln(x^3+3x-2)σφx}{\ln^2(ημx)}$

7) $2συν2x \cdot συν3x \cdot σφ4x - 3ημ2x \cdot ημ3x \cdot σφ4x - \dfrac{4ημ2x \cdot συν3x}{ημ^2 4x}$

8) $\dfrac{(συνx\text{-}ημx)\ln(ημ^2x)e^{ημx+συνx}-2σφxe^{ημx+συνx}}{\ln^2ημ^2x}$

9) $\dfrac{1/x - \ln 3x - 2}{3\sqrt[3]{\left(\dfrac{\ln 3x + 2}{e^x}\right)^2} \cdot e^x}$

10) $\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{ημ\ln x + συν\ln x}{xe^x}} \cdot \dfrac{(συν\ln x - ημ\ln x) - (ημ\ln x + συν\ln x)(1+x)}{x^2 e^x}$

16. α. $f'(x) = \dfrac{-ημx + συνx}{e^x}$ $g'(x) = e^x(συνx - ημx)$

β. $f'(0) = -1$ $g'(0) = 1$

17. $f'(x) = 50x\sqrt{5x-2} + \dfrac{25x^2 - 4}{2\sqrt{5x-2}}$ $f'(1) = 50\sqrt{3} + \dfrac{7\sqrt{3}}{2}$

18. $A_f = R^*$ $f'(x) = \dfrac{-2e^x}{(e^x - 1)^2}$

19. $A_f = R$ $f'(x) = -\dfrac{e^x}{(e^x + 1)^2}$ $f''(x) = -\dfrac{2e^{2x} - e^x)e^x + 1}{(e^x + 1)^3}$

21. $P(x) = -\dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{5x^2}{2} - x - 3$

22. $P(x) = x^2 + x - 2$

23. $g'(0) = 2$

24. $3 + \dfrac{3x - 24}{6}$ και $6 + \dfrac{x-1}{4}$

25. $A_f = (-1, +\infty)$ $f'(x) = \dfrac{3x^2\sqrt{x^3+1}}{2x^3 + 2}$ $A_g = R$ $g'(x) = \dfrac{2x(1 - \ln(x^2+3))}{(x^2+3)^2}$

26. $A_f = (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$ $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}(x+1)^2}$

27. $E'(3) = 12$

28. $E'(21) = -21$

29. $E'(1) = 20$

30. $E'(4) = 506\pi \quad V'(4) = 1001\pi$

31. $\frac{5\sqrt{15}}{2}$

32. 3

33. $\upsilon_o + \alpha t$

34. **i)** $8t + 5$ **ii)** 29 m/sec

35. **α)** 12 m/sec **β)** 10 m/sec

36. **α)** 23 m/sec **β)** 23 m/sec

37. 40 m/sec

38. $r(t) = \frac{5\sqrt{3}}{3} \quad E(t) = \frac{100\pi}{3}$

39. 7 cm / sec

40. $E'(2) = 128\pi \frac{cm^2}{sec} \qquad V'(2) = 240\pi \frac{cm^2}{sec}$

41. **α)** 99950 mm^3 **β)** 99995 mm^3

γ) 12 mm^3/mm

42. $0{,}1\ e^{9{,}6}$

43. Δεν υπάρχουν

44. $y = x + 3$

45. **α)** 20 **β)** $8 + 4\sqrt{2}\ ,\ 8 - 4\sqrt{2}$

46. $y = -x - 5$

47. **α)** $\alpha = \frac{1}{4}$ **β)** $y = x + 3$

48. **α)** $\left(-\frac{3}{2},\ -\frac{39}{4}\right)$ **β)** $(-1, -9)$

49. **α)** $(\alpha, \beta) = (2, 7)$ **β)** $(\alpha, \beta) = \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$

50. $y = x + 10 \quad x = x - \frac{2}{3}$

51. $y = -\frac{3}{\alpha^4} \cdot x + \frac{4}{\alpha^3}$

52. $y = x + 3$

53. $y = 3x + \frac{7}{3}\ ,\ \left(-\frac{7}{9},\ 0\right)$

54. $\alpha = 1, \quad \beta = 6$

55. $y = -\sqrt{2}x + \frac{\sqrt{2}(4+\pi)}{8}$

56. **α)** $\alpha = \frac{1}{2}$ **β)** $\alpha = 3 \pm \sqrt{6}$

57. $\alpha = \frac{23}{9}$

58. $A\left(\frac{1}{4},\ -\frac{15}{4}\right) \quad B\left(-\frac{1}{4},\ \frac{15}{4}\right)$

59. $y = -3x + 5$

60. $y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$ ή $y=\frac{1}{3}x+\frac{11}{3}$

62. $\alpha=\frac{5}{12}, \quad \beta=\frac{16}{12}$

65. $\alpha = 0, \ \beta = 1$

66. $y=\frac{1}{e}x-\frac{3}{e}$

67. $y = 1, \ y = -3$

68. $A(3+\sqrt{6}, -1+\sqrt{6}) \quad B(3-\sqrt{6}, -1-\sqrt{6})$

69. $y = -3x + 11$

70. **i)** $y = -x + 1$ **ii)** $y = x$

71. $\alpha = 1, \ \beta = -4, \ \gamma = 3$

72. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

73. $y = -x + 8$

74. $y = -3x, \ y = 3x - 11$

79. $\alpha = \pm 1$

81. **β)** $\alpha = 1$ ή -3

85. $1 - 9x^3$

90. -3

92. $\alpha=\frac{18}{7} \quad \beta=\frac{4}{7}$

Κεφάλαιο 1.4: Εφαρμογές των παραγώγων

Ερωτήσεις Σωστό - Λάθος.

1. Λ	**9.** Σ	**17.** Λ	**25.** Σ
2. Σ	**10.** Λ	**18.** Λ	**26.** Λ
3. Σ	**11.** Σ	**19.** Σ	**27.** Σ
4. Λ	**12.** Σ	**20.** Σ	**28.** Σ
5. Λ	**13.** Λ	**21.** Σ	**29.** Λ
6. Λ	**14.** Σ	**22.** Σ	**30.** Σ
7. Σ	**15.** Σ	**23.** Σ	**31.** Σ
8. Λ	**16.** Λ	**24.** Λ	**32.** Λ

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής.

1. Ε	**7.** Α	**13.** Δ
2. Ε	**8.** Γ	**14.** Δ
3. Ε	**9.** Γ	**15.** Β
4. Α	**10.** Α	**16.** Γ
5. Β	**11.** Γ	**17.** Β
6. Ε	**12.** Α	

Ασκήσεις

1. α) f γνησίως αύξουσα στα (-∞, 1] και [5, +∞)
f γνησίως φθίνουσα στο [1, 5]
f(1) τοπικό max
f(5) τοπικό min

β) g γνησίως φθίνουσα στο (0, 1/e]
g γνησίως αύξουσα στο [1/e, +∞)
g(1/e) ολικό ελάχιστο

2. α) f γνησίως αύξουσα στο R
β) g γνησίως φθίνουσα στο R

3. α) f γνησίως αύξουσα στο (-∞, 1/2] και [3, +∞)
f γνησίως φθίνουσα στο [1/2, 3]
f(1/2) τοπικό max
f(3) τοπικό min

β) g γνησίως αύξουσα στο (0, e]
g γνησίως φθίνουσα στο [e, +∞)
g(e) ολικό μέγιστο

4. α) f γνησίως αύξουσα στα (-∞, 0] και [2, +∞)
f γνησίως φθίνουσα στο (0, 2]
f(2) τοπικό min

β) g γνησίως αύξουσα στο (0, e]
g γνησίως φθίνουσα στο [e, +∞)
g(-1) τοπικό min
g(1) τοπικό min

5. α) f γνησίως αύξουσα στο $[\frac{1-e}{e}, +\infty)$
f γνησίως φθίνουσα στο $(-1, \frac{1-e}{e}]$
$f(\frac{1-e}{e})$ ολικό min

β) g γνησίωςαύξουσα στο [0, +∞)
g γνησίως φθίνουσα στο (-∞, 0]
g(0) ολικό ελάχιστο

6. α) f γνησίως αύξουσα στα (-∞, -1] και [4, +∞)
f γνησίως φθίνουσα στο [-1, 4]
f(-1) τοπικό max
f(4) τοπικό min

β) g γνησίως αύξουσα στο [1, 3]
g γνησίως φθίνουσα στα (-∞, -1] και [4, +∞)
g(1) τοπικό min
g(3) τοπικό max

7. α) f γνησίως αύξουσα στο [1, +∞)
f γνησίως φθίνουσα στο (-∞, 1]
f(1) ολικό ελάχιστο

β) g γνησίως αύξουσα στο (-∞, -1]
g γνησίως φθίνουσα στο [2, +∞)
g(2) ολικό μέγιστο

8. α) f γνησίως αύξουσα στο [0, 2]
f γνησίως φθίνουσα στα (-∞, 0] και [2, +∞)
f(0) τοπικό min
f(2) τοπικό max

β) g γνησίως αύξουσα στο $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$
g γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty, -\sqrt{2}]$ και $[\sqrt{2}, +\infty)$
$g(-\sqrt{2})$ τοπικό min
$g(\sqrt{2})$ τοπικό max

9. α) f γνησίως αύξουσα στα (-∞, -1] και [1, +∞)
f γνησίως φθίνουσα στο [-1, 1]
f(-1) τοπικό max
f(1) τοπικό min

β) g γνησίως αύξουσα στα (-∞, -1] και [5, +∞)
g γνησίως φθίνουσα στο [-1, 5]
g(-1) τοπικό max
g(5) τοπικό min

10. α) f γνησίως αύξουσα στα $(-\infty, -1, -\sqrt{2}\,]$ και $[-1,+\sqrt{2}\,, +\infty)$
f γνησίως φθίνουσα στο [-8, -4] και (-4, 0]
$f(-1-\sqrt{2}\,)$ τοπικό max
$f(-1+\sqrt{2}\,)$ τοπικό min

β) g γνησίως αύξουσα στα $(-\infty, -8]$ και $[0, +\infty)$
g γνησίως φθίνουσα στο [-8,-4] και (-4, 0]
g (-8) τοπικό max
g (0) τοπικό min

11. α) f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$
f γνησίως φθίνουσα στο $[-0, +\infty)$

β) g γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$

12. A(-1, 2)

13. α = -9, β = 15, γ = -4

14. α = -11, β = 19, γ = 1

15. α = 5

16. $\alpha \in (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

17. α < 0

18. α = 1/2, β = 0

19. α = -4, β = -1

20. α = 1, β = 3/2

21. α = -3

22. α = -1/2, β = 2, ολικό μέγιστο

23. α = -4/3, β = 0

26. θ = π/6

27. $x = \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{3}$

28. x = α/6

29. Το τετράγωνο

30. α = β = 40 cm

32. x = y = 10

33. Το τετράγωνο με πλευρά $\acute{a} = R\sqrt{2}$

34. A(3,5 , -0,5)

35. $A(\sqrt{\alpha}\,, \sqrt{\alpha}\,)$ και $B(-\sqrt{\alpha}\,, -\sqrt{\alpha}\,)$

36. Το μέσο της ΓΔ

38. 30 μονάδες

39. 55 άτομα

40. x = 69 και y = 68

x = 3 και y = 2

42. t = 5h και P(5) = 1350 €

43. t = 12 h

45. t = 7 min και Θ(7) = 1372 kcal

46. t = 5 χρόνια και 25 δρχ. κέρδος ανά επιβάτη

47. x = 50

48. υ = 40 και $E_{min} = 20$

49. 650 ταψάκια γαλακτομπούρεκο

Κεφάλαιο 2.1: Βασικές έννοιες στατιστικής

Ερωτήσεις Σωστό - Λάθος.

1. Σ	**3.** Σ	**5.** Λ	**7.** Λ	**9.** Σ	**11.** Σ
2. Σ	**4.** Λ	**6.** Σ	**8.** Σ	**10.** Λ	**12.** Λ

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής.

1. γ **2.** ε **3.** γ **4.** γ

Ασκήσεις

1. Ποιοτικές: Αγαπημένο μάθημα, σχολή 1ης προτίμησης, Διαγωγή.
Ποσοτικές: Μέσος όρος, Ώρες μελέτης ημερησίως, Αρ. απουσιών.

2. Πληθυσμός: Κιβώτια λαχανικών.
Μονάδες: Κιβώτια λαχανικών.
Δείγμα: Τα 10 κιβώτια που ζυγίστηκαν.
Μεταβλητή: Βάρος κιβωτίων.

3. Πληθυσμός: Μαθητές Γ΄ Λυκείου.
Άτομο: Μαθητής Γ΄ Λυκείου.
Δείγμα: Βαθμός Στατιστικής (ποσοτική διακριτή).
Μεταβλητή: Οι 10 βαθμολογίες.

4. Λάθος δείγμα διότι είναι μικρό και από συγκεκριμένο γεωγραφικό σημείο.

5. Ποιοτικές: Διαγωγή, Κατεύθυνση.
Ποσοτικές: Βαθμ. Απολ/ρίου., Αρ. απουσιών. } διακριτ.
Βάρος Συνεχής

6. α) 53 **β)** 173

7. 20

8. α) 55 **β)** 75

Κεφάλαιο 2.2: Παρουσίαση στατιστικών δεδομένων

Ερωτήσεις Σωστό - Λάθος.

1. Σ	**12.** Λ	**23.** Σ	**34.** Σ	**45.** Λ
2. Σ	**13.** Σ	**24.** Σ	**35.** Σ	**46.** Σ
3. Σ	**14.** Λ	**25.** Λ	**36.** Σ	**47.** Σ
4. Λ	**15.** Λ	**26.** Λ	**37.** Λ	**48.** Σ
5. Λ	**16.** Λ	**27.** Σ	**38.** Λ	**49.** Σ
6. Σ	**17.** Λ	**28.** Σ	**39.** Σ	**50.** Σ
7. Λ	**18.** Λ	**29.** Λ	**40.** Λ	**51.** Σ
8. Σ	**19.** Λ	**30.** Σ	**41.** Λ	**52.** Λ
9. Λ	**20.** Σ	**31.** Σ	**42.** Λ	**53.** Λ
10. Λ	**21.** Λ	**32.** Σ	**43.** Λ	**54.** Λ
11. Λ	**22.** Λ	**33.** Σ	**44.** Λ	**55.** Σ

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής.

1. δ	**7.** ε	**13.** β
2. ε	**8.** γ	**14.** α
3. α	**9.** γ	**15.** β
4. β	**10.** α	**16.** β
5. β	**11.** β	
6. γ	**12.** α	

Ασκήσεις

3. **γ) i)** 56% **ii)** 52% **iii)** 54%

5. **ii)** 6 **ii)** 10

6. **ii)** 9 **iii)** 11 **iv)** 15

9. **α)** 50 **β)** 25 **γ)** 22 **δ)** 50 **ε)** 3

37. **Χειρότερη Χρονιά:** 1995.
Μείωση 33,3% από το 1994.
Καλύτερη Χρονιά: 1998.
Αύξηση 125% από το 1997.
Αύξηση πωλήσεων: 1989-1993 και 1995-1998
Μείωση πωλήσεων: 1993-1995

38. **Θερμοκρασία μεγαλύτερη της αναμενόμενης:** Ιούλιος
Θερμοκρασία μικρότερη της αναμενόμενης: Ιανουάριος - Φεβρουάριος

42. Μέση Θερμοκρασία: 38,175 C^o

47. **i)** 14 **ii)** 43

48. **γ) i)** 20% **ii)** 50% **iii)** 47%

49. **iii)** 67% **iv)** 38,4 mgr/cm^3

52. **α)** 63 **β) i)** 39 **ii)** 6

53. **ii)** 28% **iii)** 14,6% **iv)** 19,6 % και 20,1%

54. **β) i)** 30 **ii)** 50 **iii)** 106

56. **γ)** 12

57. **iii)** 80,33 **iv)** 10

Κεφάλαιο 2.3: Μέτρα θέσης και διασποράς

Ερωτήσεις Σωστό - Λάθος.

1. Σ	**12.** Σ	**21.** Σ	**32.** Λ
2. Λ	**13.** Σ	**22.** Σ	**33.** Λ
3. Λ	**14.** Σ	**23.** Σ	**34.** Λ
4. Λ	**15.** Σ	**24.** Σ	**35.** Λ
5. Σ	**16.** Λ	**25.** Λ	**36.** Λ
6. Σ	**17α.** Σ	**26.** Λ	**37.** Σ
7. Λ	**17β.** Σ	**27.** Σ	**38.** Σ
8. Σ	**17γ.** Λ	**28.** Σ	**39.** Λ
9. Λ	**18.** Λ	**29.** Λ	**40.** Σ
10. Σ	**19.** Λ	**30.** Σ	
11. Λ	**20.** Λ	**31.** Σ	

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής.

1. α	**9.** β	**17.** ε	**24.** α
2. γ	**10.** γ	**18.** δ	**25.** β
3. β	**11.** γ	**19.** γ	**26.** γ
4. α	**12.** α	**20.** γ	**27.** α
5. δ	**13.** δ	**21.** β	**28.** δ
6. δ	**14.** δ	**22.** γ	**29.** δ
7. β	**15.** β	**23.** δ	**30.** β
8. γ	**16.** γ		

Ασκήσεις Αντιστοιχισης

1. **α** - 3 **β** - 2 **γ** - 1 **δ** - 4 **ε** - 6

2. **α** - 2 **β** - 1 **γ** - 3 **δ** - 4 **ε** - 5

3. **α** - 1 **β** - 3 **γ** - 4

Ασκήσεις

1. 28,31

2. **α)** 33,8 **β)** 38,8 **γ)** δ=33, $M_0 = 28$

3. **β)** 12 **γ)** 23,11 **δ)** 22,44

4. 43,2

5. 2 και 4.

6. 2 και 9

7. **α) i)** 184,25 **ii)** 186 **iii)** 23
Περ. 1: i) 186 **ii)** 189 **iii)** 20
Περ. 2: i) 185,7 **ii)** 189 **iii)** 25
Περ. 3: i) 184,625 **ii)** 186 **iii)** 26

8. 497,8

9. 79,8 - 106

10. **α)** 287,45 **β)** 285,25 **γ)** 283,9

12. 16

13. $\bar{x} \approx 161{,}67,\ \delta = 140$

14. 59,25

15. 14,5 - 15,25 (1ος μαθητής)
13,5 - 12,5 (2ος μαθητής)

16. **γ)** 7,986

17. **Περ. 1: i)** 4,78 **ii)** 4,5 **iii)** 3
Περ. 2: i) 4,78 **ii)** 4,5 **iii)** 3
Περ. 3: i) 4,78 **ii)** 4,5 **iii)** 3

18. **β)** 74% **γ)** $\delta \approx 368,\ Q_1 \approx 318,\ Q_3 \approx 403$

19. **α)** 173 **β)** 173

20. **γ) i)** 18,8 **ii)** $Q_1 = 16{,}1,\ Q_3 = 21{,}3$
iii) $P_{10} = 13{,}4,\ P_{30} = 16{,}64,\ P_{60} = 19{,}8$
δ) 15

22. $\delta \approx 93{,}6,\ M_0 \approx 96{,}6$

23. **i)** 5,2 **ii)** 6 **iii)** $Q_1 = 2,\ Q_3 = 7$ **iv)** 5

24. **i)** 12,52 **iii)** $Q_1 = 9{,}25,\ Q_3 = 15{,}875$
ii) 12,5 **iv)** 6,625

25. **β) i)** 2,293 **iii)** $P_{10} = 1,\ P_{40} = 2,\ P_{80} = 2$
ii) 2 **iv)** $Q_1 = 1,\ Q_3 = 2{,}5$

26. 124,21

27. Δ_1: δ, Δ_2: $\bar{x}$, Δ_3: M_0

28. **i)** 2,529 **ii)** 4 **iii)** 1,19 **iv)** 1,091

29. **α)** 20,6 **β)** 21,69 **γ)** πριν $\delta = 20,\ M_0 = 19$
μετά $\delta = 20{,}6,\ M_0 = 20{,}6$

30. **α)** 5 και 8 **β)** 87,75 **γ)** 11,9%

31. 2,48

32. **i)** 13,2 **ii)** 3 **iii)** 2,82

33. **α)** 14,1 **β)** 14,69 **γ)** 3,83 **δ)** 13
ε) $Q_1 = 11,\ Q_2 = 13,\ Q_3 = 18$
στ) 7 **ζ)** 11 **η)** 27,16%

34. **α)** 9 **β)** 19,4 ή 19,2
γ) 4,4 ή 4,38 **δ)** 48,9% ή 48,6%

35. **α)** 10 **β)** 3,16 **γ)** 39,5%

39. 1,7

40. $\bar{x} = 449{,}5,\ \delta = 449{,}5$

42. $\sqrt{2}$

44. 68% 34% 95% 47,5% 99,7%

45. $\bar{x} = 16$ $s = 2$ $CV = 12{,}5\%$
ή
$\bar{x} = 10$ $s = 2$ $CV = 20\%$

49. 12

51. **i)** $\bar{x} = 302$ $\delta = 280$ $M_0 = 280$
ii) $\bar{x} = 271{,}8$ $\delta = 252$ $M_0 = 252$
iii) $\bar{x} = 281{,}8$ $\delta = 262$ $M_0 = 262$

55. $\bar{x} = \frac{11}{6}$ $S^2 = 7{,}3$

56. **α)** **i)** 5 **ii)** 2 **iii)** $Q_1 = 2$, $Q_3 = 4$
iv) 1 **v)** 1,65
γ) **i)** 5 **ii)** 4 **iii)** $Q_1 = 4$, $Q_3 = 6$
iv) 3 **v)** 1,65

57. β) $\bar{x} = 2{,}1$ $\delta = 1$

58. **β)** **i)** 21,8 **ii)** 59,01 **iii)** 7.68
iv) 35,23%
δ) 26,82

59. **α)** $\bar{x} = 12,\ S = 2$ **β)** όχι ομοιογενές
γ) 540 **δ)** 4,9%

60. **β)** **i)** 762 **ii)** 6481 **iii)** 80,5
iv) 10,56%

Κεφάλαιο 2.4: Γραμμική παλινδρόμηση

Ερωτήσεις Σωστό - Λάθος.

1. Σ	**5.** Σ	**9.** Λ	**13.** Σ
2. Σ	**6.** Σ	**10.** Λ	**14.** Λ
3. Λ	**7.** Λ	**11.** Λ	**15.** Σ
4. Σ	**8.** Σ	**12.** Σ	**16.** Λ

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής.

1. γ	**3.** δ	**5.** γ	**7.** ε
2. α	**4.** δ	**6.** α	**8.** β

Ασκήσεις

1. $y = 2 + x$, $y = \frac{116}{7} - \frac{6}{7}x$

3. $y = \frac{11}{7} + \frac{19}{7}x$, $\frac{220}{7}$

4. $\hat{y} = 1{,}57 + 1{,}98x$

5. **α)** $y = 97 + x$ **β)** 162 cm
γ) $y = -97 + x$ **δ)** 76 Kgr

6. **α)** $y = -5{,}4 + 1{,}2x$ **β)** 6,6
γ) $y = 4{,}8 + 0{,}8x$ **δ)** 18,4

7. **α)** $y = -19 + 6x$ **β)** 17
γ) $\hat{y} = 4{,}875 + 0{,}9x$, 10,275

8. **α)** $y = \frac{28}{9} + \frac{8}{9}x$ **β)** 53 **γ)** 49,98748

9. **α)** $y = 6,5 + 2,5x$, 19
β) $\hat{y} = 7,38 + 2,28x$ 18,78

10. **α)** $\hat{y} = -2,23 + 0,67x$ **β)** 21,22 **γ)** 0,67

11. $\hat{y} = 8,38 + 0,44x$, (13, 14)

12. **β)** $\hat{y} = 2,5 + 1,11x$ **γ)** 15,82
δ) $\hat{y} = -1,53 + 0,83x$, 8,43

13. **β)** $\hat{y} = 0,67 + 0,86x$

14. **β)** $\hat{y} = 3,805 + 0,78x$ **γ)** 13,945

15. **β)** $\hat{y} = -2,99 + 1,14x$ **γ)** 11,83

16. **α)** 67,5% **β)** Στο 1ο Λύκειο

17. 6600

18. **α)** 20,4 **β)** 10

19. $\hat{y} = 4,5 + \frac{1}{3}x$

20. 7,1

21. **α)** $\hat{y} = 5 + 0,2x$ **β)** 6 **γ)** 6,25

22. **α)** $\hat{y} = 4,52 + 0,68x$ **β)** 19,792
γ) 1,36 **δ)** 14,96

Κεφάλαιο 2.5: Γραμμική συσχέτιση

Ερωτήσεις Σωστό - Λάθος.

1. Λ	**3.** Σ	**5.** Σ	**7.** Σ	**9.** Σ
2. Λ	**4.** Σ	**6.** Λ	**8.** Λ	**10.** Σ

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής.

1. γ	**3.** α	**5.** γ	**7.** δ	**9.** β	**11.** γ
2. β	**4.** δ	**6.** β	**8.** δ	**10.** ε	

Ασκήσεις

1. -0,99

2. 9, 15, 21, 24, 27, 33 Για $x = 10$, $y = 30$

3. 0,9 έντονη θετική γραμ. συσχέτιση

4. 1 τέλεια θετική γραμ. συσχέτιση

5. 1 τέλεια θετική γραμ. συσχέτιση

6. 1

7. -0,94 ισχυρή αρνητική γραμ. συσχέτιση

8. 0,98 ισχυρή θετική γραμ. συσχέτιση

9. 0,89 ισχυρή θετική γραμ. συσχέτιση

10. **α)** 0,96 **β)** 0,96

12. **β)** 0,99

13. **α)** 0,57 **β)** $\hat{y} = 4,85 + 0,14x$ **γ)** 11,15

14. **β)** 0,65 θετική γραμ. συσχέτιση

Κεφάλαιο 3.1: Δειγματικός χώρος. Ενδεχόμενα.

Ερωτήσεις Σωστό - Λάθος.

1. Λ	**7.** Σ	**13.** Σ	**19.** Σ	**25.** Λ
2. Σ	**8.** Λ	**14.** Σ	**20.** Σ	**26.** Σ
3. Σ	**9.** Λ	**15.** Λ	**21.** Λ	**27.** Λ
4. Σ	**10.** Σ	**16.** Λ	**22.** Σ	**28.** Λ
5. Λ	**11.** Λ	**17.** Σ	**23.** Λ	**29.** Λ
6. Σ	**12.** Σ	**18.** Σ	**24.** Λ	**30.** Σ

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής.

1. δ	**5.** α	**9.** β
2. α	**6.** δ	**10.** ε
3. γ	**7.** α	
4. δ	**8.** β	

Ασκήσεις αντιστοίχισης.

1)	2)	3)	4)	5)
1. γ	**1.** ε	**1.** δ	**1.** δ IV	**1.** iv
2. α	**2.** α	**2.** ζ	**2.** γ II	**2.** vi
3. δ	**3.** δ	**3.** β	**3.** α VI	**3.** iii
4. ζ	**4.** ζ	**4.** γ	**4.** ε I	**4.** ii
5. ε		**5.** α		
6. β		**6.** ε		

Ασκήσεις.

1) i) (1, 1) (1, 2) (1, 3) (1, 4) (1, 5) (1, 6)
(2, 1) (2, 2) (2, 3) (2, 4) (2, 5) (2, 6)
(3, 1) (3, 2) (3, 3) (3, 4) (3, 5) (3, 6) $N(\Omega) = 16$
(4, 1) (4, 2) (4, 3) (4, 4) (4, 5) (4, 6)
(5, 1) (5, 2) (5, 3) (5, 4) (5, 5) (5, 6)
(6, 1) (6, 2) (6, 3) (6, 4) (6, 5) (6, 6)

ii) α) $A = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$ $N(A) = 9$

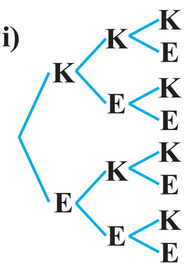
β) $B = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 6)\}$ $N(B) = 15$

γ) $\Gamma = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$ $N(\Gamma) = 6$

δ) $\Delta = \{(2, 6), (4, 6), (6, 6)\}$ $N(\Delta) = 3$

ε) $E = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$ $N(E) = 5$

2) i)



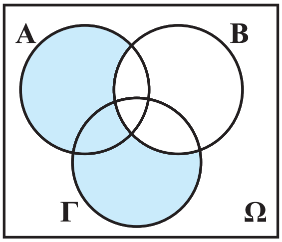
Ω = {KKK, KKE, KEK, KEE, EKK, EKE, EEK, EEE} $N(\Omega) = 8$

ii) Α = {ΚΚΕ, ΚΕΚ, ΚΚΚ, ΚΕΕ}   ΝΑ = 4
Β = {ΚΕΚ, ΚΚΚ, ΕΚΕ, ΕΕΕ}   Ν(Β) = 4

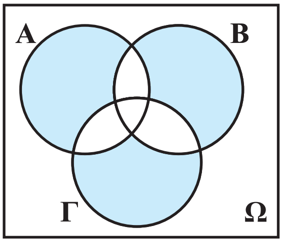
iii) Αν $A \cap B$ = Η πρώτη και τρίτη ρίψη φέρνει Κ
Α΄= Η πρώτη ρίψη δεν φέρνει Κ.
Β΄ = Η πρώτη και τρίτη ρίψη έχουν διαφορετικό αποτέλεσμα.

iv) $A \cap B$ = {ΚΚΚ, ΚΕΚ}
Α΄ = {ΕΚΚ, ΕΚΕ, ΕΕΚ, ΕΕΕ}
Β΄ = {ΚΚΕ, ΚΕΕ, ΕΚΚ, ΕΕΚ}

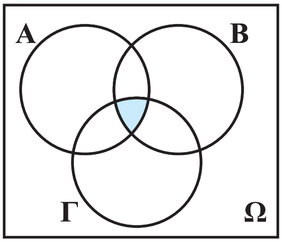
3) **i)**



ii)



iii)



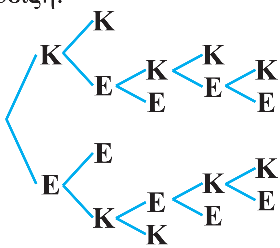
4) i) $\Omega = \{MK_1, MK_2, M\Pi_1, M\Pi_2, K_1K_2, K_1\Pi_1, K_1\Pi_2, \Pi_1\Pi_2, K_2\Pi_1, K_2\Pi_2\}$

ii) $A = \{K_1K_2, \Pi_1\Pi_2\}$

$B = \{MK_1, MK_2, M\Pi_1, M\Pi_2\}$

$\Gamma = \{K_1K_2, K_1\Pi_1, K_1\Pi_2, K_2\Pi_1, K_2\Pi_2, \Pi_1\Pi_2\}$

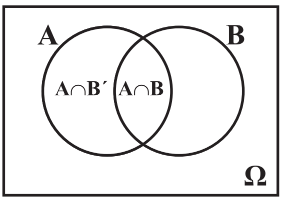
5) Υπόδειξη:



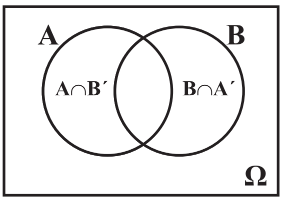
6) Όμοια με άσκηση 5.

7) Είναι τυχερά παιχνίδια.
Χρησημοποιούμε μή ομοιογενές ζάρι.

8) **i)**



ii)

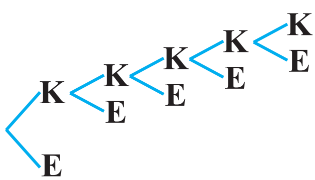


9) i) Ω = {ΑΚ, ΑΛ, ΑΑ, ΚΚ, ΚΛ, ΚΑ}
ii) α) Α = {ΑΑ, ΚΑ}   **β)** Β = {ΚΚ, ΚΛ}

10) Δενδροδιάγραμμα.

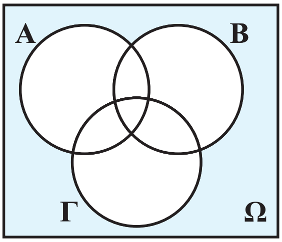
11) Δειγματικός χώρος όπως στην άσκηση 1.

12)

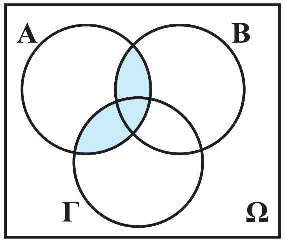


13)

i)



ii)



14) i) Έστω $x \in A' \cap B \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x \in A' \\ \text{και} \\ x \in B \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x \notin A \\ \text{και} \\ x \in B \end{matrix}\right\} \text{Άρα } x \notin B \cap A$$

ii) $(A' \cup B)' = (A')' \cap B' = A \cap B'$

Κεφάλαιο 3.2: Η έννοια της πιθανότητας.

Ερωτήσεις Σωστό - Λάθος.

1. Σ **2.** Σ **3.** Λ **4.** Σ **5.** Λ
6. Λ **7.** Σ **8.** Λ **9.** Λ
10. Λ **11.** Σ **12.** Σ **13.** Λ
14. Λ **15.** Σ **16.** Λ **17.** Σ
18. Λ **19.** Λ **20.** Σ

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής.

1. ε **2.** ε **3.** β **4.** ε **5.** β **6.** γ **7.** β **8.** γ **9.** δ **10.** α

Ασκήσεις αντιστοίχισης.

1. γ **2.** ε **3.** δ **4.** α **5.** β

Ασκήσεις.

1) $0 \leq P(A \cap B) \leq 1/4$, $1/3 \leq P(A \cup B) \leq 7/12$

2) $P(A) = 4/52$, $P(B) = 12/52$, $P(\Gamma) = 13/52$
$P(A) = 4/51$, $P(B) = 11/51$, $P(\Gamma) = 12/51$

3) $P(A) = 1/2$, $P(B) = 55/76$, $P(\Gamma) = 12/76$
$P(\Delta) = 12/76$, $P(E) = 8/76$

4) α) 5 **β)** 3 **γ)** 11

5) $P(A) = 6/52$, $P(B) = 2/52$, $P\Gamma = 10/52$

6) $P = 62/120$

7) $P(\Delta) = 0{,}4$

8) $P(B) = 5/19$, $P(A) = 10/19$, $P(\Gamma) = 4/19$

9) $P(\varepsilon\pi) = 3/4$

10) $P(B) = 1/6$, $P(A) = 1/2$, $P(A' \cup B') = 7/12$
$P(A \cap B') = 1/12$, $P(A' \cap B') = 3/4$

14) $P(\text{πρώτος}) = 10/25 = 2/5$, $P = 9/25$

15) $P(\alpha) = 1/2$, $P(\beta) = 16/100$, $P(\gamma) = 3/100$

16) $P(\alpha) = 85/90$, $P(\beta) = 5/90$, $P(\gamma) = 2/3$

17) $P = 3/8$

23) $x = 4$, $x = 2/3$, $x = 1/2$

24) 4/15, 1/15, 1/6

25) 1/3, 2/3, 1/12

28) Δεν υπάρχουν.

29) $P(\omega_4) = 17/29$

30) $P(\omega_1) = 1/11$, $P(\omega_2) = 2/11$, $P(\omega_3) = 3/11$, $P(\omega_4) = 5/11$

31) $P(A \cup B) = 9/15$

32) 1/6

33) $P(A) = 1/3$, $P(B) = 4/9$, $P(\Gamma) = 1/9$, $P(\Delta) = 0$

Κεφάλαιο 3.3: Συνδυαστική και Πιθανότητες

Ερωτήσεις Σωστό - Λάθος.

1. Σ **3.** Σ **5.** Σ **7.** Σ **9.** Σ
2. Σ **4.** Σ **6.** Σ **8.** Σ **10.** Λ

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής.

1. ε **3.** γ **5.** α **7.** β **9.** α
2. ε **4.** ε **6.** β **8.** β **10.** α

Ασκήσεις

1) **α)** $\left(\dfrac{\nu}{\nu+1}\right)^{\nu}$, **β)** 4, **γ)** 9, **δ)** $\dfrac{2(\nu-2)}{3(\nu-1)}$

3) **α)** ν = 7, **β)** ν = 10

4) 4536

5) 9!, 2 · 5! · 4!

6) 30

7) 3 · 3 · 3 - 1

8) 24 · 24 · 24 · 9 · 10 · 10

9) 9 · 8 · 7 · 6, 9 · 9 · 9 · 9

10) 2401

11) 4500

12) $\binom{49}{6}$

13) $\binom{20}{5}, \binom{19}{4}$

14) $\binom{27}{5}$, $P(\alpha) = \dfrac{\binom{15}{5}}{\binom{27}{5}}$, $P(\beta) = \dfrac{\binom{15}{2}\binom{12}{3}}{\binom{27}{5}}$

$$P(\gamma) = \frac{\binom{12}{3}\binom{15}{2} + \binom{12}{4}\binom{15}{1} + \binom{12}{5}}{\binom{27}{5}}$$

$$P(\delta) = \frac{\binom{15}{5} + \binom{15}{4}\binom{12}{1} + \binom{15}{3}\binom{12}{2} + \binom{15}{2}\binom{12}{3}}{\binom{27}{5}}$$

15) $1 - \dfrac{\Delta_5^{12}}{E_5^{12}}$

16) $P(A) = \dfrac{\binom{18}{6}}{\binom{49}{6}}$, $P(B) = \dfrac{\binom{12}{5}\binom{37}{1}}{\binom{49}{6}}$

17) $P=\dfrac{\binom{43}{6}}{\binom{49}{6}}$

18) P(A) = 1/5, P(B) = 6/21, P(Γ) = 2/35

19) $P(A)=1-\dfrac{\binom{16}{5}}{\binom{20}{5}}$

20) $P(A)=\dfrac{\binom{6}{3}+\binom{4}{1}\binom{6}{2}+\binom{4}{2}\binom{6}{1}}{\binom{10}{3}}$

$P(B)=\dfrac{\binom{4}{1}\binom{6}{2}+\binom{4}{2}\binom{6}{1}+\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}}$

21) P = 1/3

Κεφάλαιο 3.4: Δεσμευμένη Πιθανότητα - Ανεξάρτητα Ενδεχόμενα

Ασκήσεις

1) P(A) = 1/6

3) **α)** P(B) = 5/9
β) δεν είναι ανεξάρτητα.
γ) δεν είναι ασυμβίβαστα.

4) P(A|B) = 5/6, δεν είναι ανεξάρτητα.

10) P = 1/78

11) P(α) = 0,72, P(β) = 0,26, P(γ) = 0,02